

Ю. Н. Каштанов

Модели финансовой математики и статистическое моделирование

Санкт-Петербург
2013

УДК 519.245

Рецензенты: проф. С. М. Ермаков (Санкт-Петербург. гос. ун-т),
к.ф.-м.н. А. А. Гормин (Люксофт Профешнл).

Печатается по решению кафедры статистического моделирования
Санкт-Петербургского государственного университета

Настоящее издание является учебным пособием по одноименному курсу автора для студентов кафедры статистического моделирования СПбГУ. В нем рассмотрены основные модели финансового рынка, а также теоретические вопросы эффективного использования метода статистического моделирования для численного решения возникающих на практике задач.

ISBN 978-5-9651-0741-4

© Ю.Н.Каштанов 2013

Оглавление

1	Модели с дискретным временем	3
1.1	Модель B-S рынка	3
1.2	Портфель ценных бумаг	5
1.3	Безарбитражность	7
1.4	Форварды и фьючерсы	14
1.5	Опцион европейского типа	17
1.5.1	Хеджирование. Цена опциона.	18
1.5.2	Пример расчета опциона	21
1.5.3	Существенная выборка	22
1.6	Опцион американского типа	23
1.6.1	Цена опциона американского типа	23
1.6.2	Марковский случай	28
1.6.3	Метод стохастической сетки	30
2	Модель геометрического броуновского движения	37
2.1	Мартингальная мера	39
2.2	Опцион европейского вида	41
2.2.1	Стандартные опционы	43
2.2.2	Опционы с последствием	45
2.2.3	Барьерные опционы	47
2.3	Опцион американского типа	48
2.3.1	Метод стохастической сетки	49
2.3.2	Метод стохастического интегрирования по частям	52

3	Диффузионные модели	60
3.1	Модели акций	60
3.1.1	Модель локальных волатильностей	60
3.1.2	Задача Коши	62
3.1.3	Вычисление локальных волатильностей. Гладкие функции.	65
3.1.4	Дискретный случай.	67
3.1.5	Модель стохастической волатильности	69
3.2	Модели облигаций	75
3.2.1	Модель Халла-Уайта	76
3.2.2	Модель Хита-Джарроу-Мортонa	78
3.3	Моделирование диффузионных процессов.	79
3.3.1	Оценка погрешности	80
3.3.2	Погрешность при вычислении функционалов	84
3.3.3	Оценки с минимальной дисперсией	88
3.4	Американский опцион.	92
4	Модели со скачками.	95
4.1	Пуассоновский процесс	95
4.2	Диффузия со скачками	98
4.3	Уменьшение дисперсии	103

Глава 1

Модели с дискретным временем

Дискретная модель рынка была разработана в статьях Кокса, Росса, Рубинштейна [1], Харрисона, Крепса [2] и подробно изложена в работах Ширяева и др. [3, 4]; метод стохастической сетки для оценивания опциона американского типа был предложен в статье Броди и Глассермана [7], см. также монографию Глассермана [8].

Везде в этой главе будем предполагать, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \dots, N$; последовательность неотрицательных $\mathcal{F}_n$ -измеримых случайных величин S_n , $n = 0, \dots, N$, будем интерпретировать как цены некоторых ценных бумаг. Будем обозначать $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$; доходность в момент n определим как $\rho_n = \Delta S_n / S_{n-1}$; последовательность цен S_n в свою очередь может быть выражена через доходности: $S_n = S_0(1 + \rho_1) \dots (1 + \rho_n)$.

1.1 Модель B-S рынка

Свое название данная модель получила по той причине, что в ней рассматриваются два вида ценных бумаг: облигации (bond) и акции (stock). **Облигации.** В простейшем случае, облигация - это ценная бумага, об-

ладатель которой получает фиксированный доход (будем полагать его равным 1) в момент времени t ; цену облигации в момент времени $n \leq t$ будем обозначать $P_n(t)$ и считать, что это $\mathcal{F}_n$ -измеримые случайные величины, удовлетворяющие условию $P_t(t) = 1$. Текущая процентная ставка (current interest rate) определяется как доходность облигации с ближайшим сроком погашения:

$$r_n = (P_n(n) - P_{n-1}(n))/P_{n-1}(n) = (1 - P_{n-1}(n))/P_{n-1}(n).$$

Таким образом, r_n являются $\mathcal{F}_{n-1}$ измеримыми величинами. Из экономических соображений $P_{n-1}(n) \leq 1$, так что $r_n \geq 0$. С понятием текущей процентной ставки тесно связана последовательность

$$B_n = B_0(1 + r_1) \dots (1 + r_n),$$

которая называется «банковский счет» (см. [4]) Отметим, что случайная величина B_n является $\mathcal{F}_{n-1}$ измеримой и, кроме того, последовательность B_n - неубывающая.

Акции. Акция (a share of stock) - это ценная бумага, дающая владельцу право владения некоторой частью имущества, активов и доходов корпорации (см. [17]). Цену акции в момент времени n будем обозначать S_n , считая, что это неотрицательная, $\mathcal{F}_n$ -измеримая случайная величина.

Часто рассматривается модель рынка, в которой владельцу акции в момент времени n выплачиваются дивиденды δ_n , которые мы будем считать $\mathcal{F}_n$ -измеримыми случайными величинами. Если дивиденды неслучайные и в момент времени k выплачиваются дивиденды в размере δ_k , то в момент времени $n < k$ их можно рассматривать как фиксированный доход в будущем. Цена такого актива в момент времени n равна $\delta_k P_n(k)$, а цена акции представляется в виде

$$S_n = R_n + \sum_{k=n+1}^N \delta_k P_n(k),$$

где R_n - неотрицательная $\mathcal{F}_n$ -измеримая случайная величина.

Мы будем рассматривать также ситуации, когда заданы цены не одной, а нескольких акций S_n^i , $i = 1, \dots, d$. Кроме того, банковский счет B_n в некоторых случаях тоже можно рассматривать как цену акции; в этом случае будем обозначать его S_n^0 .

1.2 Портфель ценных бумаг

Введем понятие торговой стратегии (портфеля). Стратегией π будем называть набор $\mathcal{F}_n$ -измеримых случайных величин γ_n^i , $i = 0, \dots, d$. Случайная величина γ_n^i обозначает количество бумаг i -го типа в момент времени n , $\pi_n = \{\gamma_n^i\}_{i=0}^d$ - состояние портфеля в момент времени n . Как и в случае с ценами, величину γ_n^0 обозначим особым образом $\gamma_n^0 = \beta_n$ - денежные средства на банковском счете. Отметим, что все величины могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательная величина на банковском счете означает взятие в долг, отрицательная позиция по акциям для трейдеров также возможна и называется «короткой» (short) позицией.

Цена портфеля в момент времени n обозначается символом X_n^π и определяется естественным образом: $X_n^\pi = \sum_{i=0}^d \gamma_n^i S_n^i$. Последнюю сумму обозначим (γ_n, S_n) . Сумму, в которой индекс i пробегает значения от 1 до d , будем обозначать в виде произведения без скобок: $\gamma_n S_n = \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i$, так что X_n^π может быть представлено в виде $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$.

Для стратегии π введем понятие самофинансируемости: стратегия называется самофинансируемой, если $(\gamma_n, S_n) = (\gamma_{n-1}, S_n)$ для любого n . Условие самофинансируемости можно записать как $(\Delta \gamma_n, S_n) = 0$. Поскольку ΔX_n^π может быть представлено в виде $\Delta X_n^\pi = (\Delta \gamma_n, S_n) + (\gamma_{n-1}, \Delta S_n)$, то отсюда следует, что $\Delta X_n^\pi = (\gamma_{n-1}, \Delta S_n)$ и, следовательно,

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\gamma_{k-1}, \Delta S_k). \quad (1.1)$$

Отметим, что условие самофинансируемости позволяет выразить значение β_k через значения γ_k^i , $i = 1, \dots, d$. Поэтому для самофинансируемой стратегии достаточно задавать X_0^π и γ_k^i , $i = 1, \dots, d$ и под стратегией π мы можем понимать пару $(X_0, \{\gamma_k^i\}_{i=1}^d)_{k=0}^{N-1}$. В дальнейшем будем рассматривать только самофинансируемые стратегии.

Рассмотрим понятие дисконтирования. Введем величину $\alpha_n = B_0/B_n$, которую будем называть коэффициентом дисконтирования. Отметим, что величина α_n может быть выражена в виде

$$\alpha_n = \frac{1}{(1+r_1) \dots (1+r_n)}.$$

Цены, умноженные на коэффициент дисконтирования, будем называть дисконтированными и обозначать тем же символом с добавлением значка $\sim$, например, $\tilde{S}_n^i = \alpha_n S_n^i$. Иногда будем использовать также величину

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{(1+r_k) \dots (1+r_n)}.$$

Дисконтированная цена портфеля имеет представление $\tilde{X}_n = (\gamma_n, \tilde{S}_n)$. Кроме того, для дисконтированных цен выполнено условие самофинансирования $(\Delta\gamma_n, \tilde{S}_n) = 0$. Следовательно, для дисконтированных цен выполняется аналог равенства (1.1):

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\gamma_{k-1}, \Delta\tilde{S}_k). \quad (1.2)$$

Учитывая, что $\tilde{\Delta B}_k = 0$, а также принятые обозначения, перепишем (1.2) в виде

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n \gamma_{k-1} \Delta\tilde{S}_k. \quad (1.3)$$

В случае, когда по акциям выплачиваются дивиденды (δ_n^i) , условие самофинансируемости определяется равенством:

$$\beta_n B_n + \gamma_n S_n = \beta_{n-1} B_n + \gamma_{n-1} (S_n + \delta_n).$$

Для дисконтированных цен получаем формулу

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n \gamma_{k-1} (\Delta \tilde{S}_k + \tilde{\delta}_k). \quad (1.4)$$

1.3 Безарбитражность

Дадим определение: рынок называется безарбитражным, если для любой стратегии π , такой что $X_0^\pi = 0$ и $X_N^\pi \geq 0$ п.н. следует, что $X_N^\pi = 0$ п.н.

Пользуясь непосредственно определением, легко показать, что в случае, когда банковский счет является детерминированной последовательностью, из безарбитражности следует выражение для цены облигации

$$P_n(t) = \alpha_{n+1,t}. \quad (1.5)$$

Действительно, предположим, что для некоторых n и t существует событие $\Omega_{n,t} \in \mathcal{F}_n$ положительной вероятности, такое что для $\omega \in \Omega_{n,t}$ имеет место неравенство $P_n(t) < \alpha_{n+1,t}$, тогда стратегия $\beta_k = -P_n(t)/B_n$, $\gamma_k = 1$, при $k = n, \dots, t$, $\omega \in \Omega_{n,t}$, и равная нулю в противном случае, является арбитражем, поскольку с положительной вероятностью

$$X_t = -\frac{P_n(t)}{B_n} B_t + 1 > 0.$$

Аналогично рассматривается случай $P_n(t) > \alpha_{n+1,t}$.

Сформулируем достаточное условие безарбитражности B-S рынка. Напомним, что последовательность случайных величин M_n на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}\}$ называется мартингалом, если выполнены следующие условия: $\mathbf{E}|M_n| < \infty$ и $\mathbf{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$.

В дальнейшем условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F})$ для удобства обозначений будем иногда записывать в виде $\mathbf{E}_{\mathcal{F}} \xi$.

Теорема 1.1 Пусть существует мера $\tilde{\mathbf{P}}$, эквивалентная исходной мере $\mathbf{P}$ и такая, что $\tilde{S}_n$ является мартингалом относительно $\{\Omega, \mathcal{F}_n, \tilde{\mathbf{P}}\}$, тогда рынок - безарбитражный.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1.1 Пусть дана последовательность $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n Y_k \Delta Z_k$, $\mathbf{E}|M_0| < \infty$, Y_k - $\mathcal{F}_{k-1}$ -измеримы, Z_k -мартингал, тогда

1. $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}|M_n| < \infty$ п.н.;
2. $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}M_n = M_{n-1}$ п.н.

Доказательство. Обозначим через I_n^j индикатор следующего множества $A_n^j = \{\omega : |Y_k| \leq j, k = 1, \dots, n\}$ и положим $Y_n^j = Y_n I_n^j$; заметим, что величины I_n^j и Y_n^j - $\mathcal{F}_{n-1}$ - измеримы. Далее, обозначим $M_n^j = M_0 + \sum_{k=1}^n Y_k^j \Delta Z_k$. Последовательность M_n^j образует мартингал. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|M_n^j| &\leq \mathbf{E}|M_0| + \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|Y_k^j \Delta Z_k| \leq \mathbf{E}|M_0| + j \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\Delta Z_k| < \infty, \\ \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}M_n^j &= M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^j \Delta Z_k + Y_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} \Delta Z_n = M_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Для величин $\{I_n^j\}$ выполняется $I_n^j I_k^j = I_n^j$ при $k \leq n$, поэтому

$$I_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}|M_n| = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}|M_n| I_n^j = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}|M_n^j| I_n^j \stackrel{\text{п.н.}}{<} \infty.$$

Поскольку $I_n^j \rightarrow 1$ п.н. при $j \rightarrow \infty$, то $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}|M_n| < \infty$ п.н. Аналогично,

$$I_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}M_n = I_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}M_n^j = I_n^j M_{n-1}^j = I_n^j M_{n-1}.$$

Устремляя $j \rightarrow \infty$, получим второе утверждение леммы.

Лемма 1.2 Пусть в условиях предыдущей леммы для некоторой константы $C > 0$ выполнено $M_N \leq C$ или $M_N \geq -C$, тогда последовательность M_n является мартингалом.

Доказательство. Фактически доказать остается только конечность математического ожидания случайных величин M_n . Будем обозначать через x^+ , x^- положительную и отрицательную части числа x , так что $x = x^+ - x^-$. Пусть $M_N^- \leq C$, тогда, используя неравенство Йенсена и предыдущую лемму, получим

$$C \geq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{N-1}} M_N^- \geq (\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{N-1}} M_N)^- = M_{N-1}^-.$$

Индукцией получаем, что $M_n \geq -C$ для любого n . Далее, используем лемму Фату:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} M_n^+ &= \mathbf{E} \lim_j (M_n^j)^+ \leq \lim_j \inf \mathbf{E} (M_n^j)^+ = \lim_j \inf (\mathbf{E} M_n^j + \mathbf{E} (M_n^j)^-) \\ &\leq \mathbf{E} M_0 + \mathbf{E} \max_{k \leq n} M_k^- \leq \mathbf{E} M_0 + C. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя приведенные выше леммы, докажем теорему 1.1. По формуле (1.3) и условиям теоремы

$$\tilde{X}_N = \tilde{X}_0 + \sum_{k=1}^N \gamma_{k-1} \Delta \tilde{S}_k \geq 0.$$

Пусть $\tilde{S}_n$ - мартингал по мере $\tilde{\mathbf{P}}$, тогда из леммы 1.2 следует, что $\tilde{X}_n$ - мартингал по той же мере, следовательно, $\tilde{\mathbf{E}} \tilde{X}_N = \tilde{X}_0 = 0$ и, значит, $X_N = 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$ -п.н. Поскольку $\tilde{\mathbf{P}}$ эквивалентна исходной мере $\mathbf{P}$, то $X_N = 0$ $\mathbf{P}$ -п.н. Безарбитражность доказана.

Замечания. 1. Поскольку мы будем рассматривать только эквивалентные меры, то в неравенствах и равенствах, связывающих случайные величины, упоминание о выполнении их «почти наверное» будем опускать.

2. Отметим часто встречающиеся формулировки условия мартингальности. Введем величину $F_{n-1} = (1 + r_n)S_{n-1}$ («фьючерсная» цена), тогда условие мартингальности можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = F_{n-1}. \quad (1.6)$$

Учитывая, что $S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}$, имеем также

$$\tilde{\mathbf{E}}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) = r_n. \quad (1.7)$$

Следствие 1. Предположим, что для некоторой меры $\tilde{\mathbf{P}}$ цены облигаций могут быть выражены в виде

$$P_n(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{n+1,t}. \quad (1.8)$$

Заметим, что такое представление согласуется с (1.5). В этом случае рынок, состоящий из банковского счета и облигаций, является безарбитражным. Действительно, в этом случае $\tilde{P}_n(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{1,t}$, т.е. дисконтированные цены облигаций являются мартингалом.

Следствие 2. Если рассматривается модель с дивидендами, то из доказательства леммы и представления (1.4) следует, что для безарбитражности достаточно потребовать, чтобы мартингалом была последовательность $\tilde{S}_n + \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k$. Если дивиденды – детерминированные величины, то последнее выражение может быть переписано в виде

$$\tilde{R}_n + \sum_{k=n+1}^N \delta_k \tilde{P}_n(k) + \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k.$$

Предположим, что для $P_n(k)$ имеет место представление (1.8). Покажем, что величины

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k + \sum_{k=n+1}^N \delta_k \tilde{P}_n(k).$$

образуют мартингал. Математическое ожидание величин Z_n конечно и, кроме того

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} Z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\delta}_k + \delta_n \alpha_n + \sum_{k=n+1}^N \delta_k \tilde{P}_{n-1}(k).$$

Учитывая что $\alpha_n = \alpha_{n-1} \frac{1}{1+r_n} = \alpha_{n-1} P_{n-1}(n) = \tilde{P}_{n-1}(n)$, получаем, что $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} Z_n = Z_{n-1}$. Таким образом, для безарбитражности рынка с детерминированными дивидендами достаточно потребовать, чтобы мартингалом была последовательность $\tilde{R}_n$.

Биномиальная модель. Предположим, что при фиксированной траектории $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ случайная величина S_n может принять только два значения $S_n(d)$ и $S_n(u)$. Будем считать, что величины $S_n(d)$ и $S_n(u)$, также как и текущая процентная ставка r_n , являются функциями от $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$. Такой рынок будем называть биномиальным. Условие мартингалности (1.6) имеет вид $\tilde{p}_n S_n(u) + (1 - \tilde{p}_n) S_n(d) = F_{n-1}$, откуда имеем

$$\tilde{p}_n = \frac{F_{n-1} - S_n(d)}{S_n(u) - S_n(d)}. \quad (1.9)$$

Если выполняются неравенства $S_n(d) < F_{n-1} < S_n(u)$, то $0 < \tilde{p}_n < 1$ и значит формула (1.9) определяет мартингальную меру. Тем самым, в биномиальной модели мартингальная мера определяется однозначно. Умножив числитель и знаменатель на α_n , получим представление

$$\tilde{p}_n = \frac{\tilde{S}_{n-1} - \tilde{S}_n(d)}{\tilde{S}_n(u) - \tilde{S}_n(d)}. \quad (1.10)$$

Если положить $a_n = \rho_n(d)$, $b_n = \rho_n(u)$, то получаем выражение через доходности:

$$\tilde{p}_n = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

Выбор мартингальной меры. В общем случае, множество мартингалов может состоять более, чем из одной меры и естественно рассматривать ту мартингальную меру, которая в каком-то смысле близка

к исходной. Выберем какую-то выпуклую функцию $g(x)$ и рассмотрим в качестве критерия близости мартингальной меры $\mathbf{Q}$ к исходной мере $\mathbf{P}$ величину

$$R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \int_{\Omega} g(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}) d\mathbf{P}. \quad (1.11)$$

Если, например, положить $g(x) = 0.5(\sqrt{x} - 1)^2$, то $R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = H^2(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, где H - расстояние Хеллингера. Часто рассматривается в качестве критерия близости относительная энтропия, что соответствует $g(x) = x \ln x$. Мартингальная мера $\mathbf{Q}$ выбирается таким образом, чтобы минимизировать $R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})$.

Рассмотрим пример. Пусть исходная мера порождается переходными плотностями $p_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$, текущая процентная ставка r равна нулю, а $g(x) = x^2$. Пусть некоторая мера $\mathbf{Q}$, порождается плотностями $q_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$, тогда

$$R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \int_{R^N} dx_1 \dots dx_N \frac{q_1^2}{p_1} \dots \frac{q_N^2}{p_N}.$$

Отметим, что для любой переходной плотности $q_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$, порождающей мартингальную меру, и для любых λ, μ , не зависящих от x_n выполнено равенство

$$\int_0^{\infty} dx_n (\lambda + \mu x_n) q_n = \lambda + \mu x_{n-1}.$$

Положим $\lambda_{N+1}^* = 1, \mu_{N+1}^* = 0$, и предположим, что для $n = N, \dots, 1$ система уравнений

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} dx_n p_n \frac{\lambda_n + \mu_n x_n}{\lambda_{n+1}^* + \mu_{n+1}^* x_n} = 1, \\ \int_0^{\infty} dx_n p_n \frac{\lambda_n + \mu_n x_n}{\lambda_{n+1}^* + \mu_{n+1}^* x_n} x_n = x_{n-1}, \end{cases} \quad (1.12)$$

имеет неотрицательное решение λ_n^*, μ_n^* . Обозначим $h_n(x) = \lambda_n^* + \mu_n^* x$. Покажем, что оптимальная по выбранному критерию мартингальная

мера порождается переходными плотностями

$$q_n^* = p_n \frac{h_n(x_n)}{h_{n+1}(x_n)}.$$

Действительно, для произвольной мартингальной плотности q_n имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{q_n^2}{p_n} h_{n+1}(x_n) dx_n &= \int_0^\infty \frac{q_n^2}{q_n^*} h_n(x_n) dx_n = \\ &= \int_0^\infty q_n^* h_n(x_n) + \int_0^\infty \frac{(q_n - q_n^*)^2}{q_n^*} h_n(x_{n-1}) \geq h_n(x_{n-1}). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\int_0^\infty (q_n^*)^2 / p_n h_{n+1}(x_n) dx_n = h_n(x_{n-1})$. Поэтому,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) &= \int_{R^{N-1}} dx_1 \dots dx_n \frac{q_1^2}{p_1} \dots \frac{q_{N-1}^2}{p_{N-1}} \int_R dx_N \frac{q_N^2}{p_n} \\ &\geq \int_{R^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{q_1^2}{p_1} \dots \frac{q_{N-1}^2}{p_{N-1}} h_N(x_{N-1}) \geq \dots \\ &\geq h_1(x_0) = \int_R dx_1 \frac{(q_1^*)^2}{p_1} h_2(x_1) = \dots \\ &= \int_{R^N} dx_1 \dots dx_N \frac{(q_1^*)^2}{p_1} \dots \frac{(q_N^*)^2}{p_N}. \end{aligned}$$

Пусть процесс цен имеет вид $S_n = S_{n-1} e^{\sigma \xi_n + \tau}$, где ξ_n - независимые стандартные нормальные случайные величины, тогда

$$\begin{aligned} p_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x) &= \frac{d}{dx} \mathbf{P} \left(\xi_n < \frac{\ln(x/x_{n-1}) - \tau}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\ln(x/x_{n-1}) - \tau)^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{x\sigma}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Система уравнений (1.12) при $n = N$ после замены $x_N = x_{N-1} e^{\sigma y}$ при-

нимает вид

$$\begin{cases} \int_R dy \varphi(y)(\lambda_N + \mu_N x_{N-1} e^{\sigma y + \tau}) = 1, \\ \int_R dy \varphi(y)(\lambda_N + \mu_N x_{N-1} e^{\sigma y + \tau}) e^{\sigma y + \tau} = 1, \end{cases}$$

где $\varphi(y)$ - плотность нормального распределения. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_N &= \frac{1 - a_1}{a_2 - a_1^2} \frac{1}{x_{N-1}}, \\ \lambda_N &= \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_1^2}, \end{aligned}$$

где $a_1 = e^{0.5\sigma^2 + \tau}$, $a_2 = e^{2\sigma^2 + 2\tau}$. Если $-1.5\sigma^2 \leq \tau \leq -0.5\sigma^2$, то $\lambda_N, \mu_N \geq 0$ и, кроме того, $h_N(x_{N-1})$ не зависит от x_{N-1} . Таким образом, оптимальная мартингальная мера порождается плотностью для величин ξ_n , равной

$$q_\xi(x) = \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(x - \sigma).$$

Отметим, что в данной модели обычно используется другая мартингальная мера, при которой плотность случайной величины ξ_n имеет вид $q_\xi(x) = \varphi(x + 0.5\sigma + \tau/\sigma)$.

1.4 Форварды и фьючерсы

Форвард - это контракт, по которому один из участников обязуется продать, а другой из участников обязуется купить некоторый актив в определенный момент времени t по определенной цене. Эта цена называется форвардной ценой; обозначим ее $\Phi_n(t)$, где n - момент заключения контракта. Естественно считать, что величина $\Phi_n(t)$ - $\mathcal{F}_n$ -измерима и $\Phi_t(t) = S_t$.

Опишем данный контракт в терминах некоторой «акции» на первичном рынке. В момент заключения контракта ни один из участников

не затрачивает никаких средств, поэтому мы можем интерпретировать форвардный контракт как некоторую «акцию», которая имеет нулевую цену, но по которой в момент времени t выплачиваются дивиденды. Для определенности будем считать, что участник контракта, который обязуется купить оговоренный актив, имеет «длинную» позицию по этой «акции» (т. е. в его портфеле форвардный контракт считается со знаком плюс), а участник, который обязуется его продать имеет «короткую» позицию. Тогда, как нетрудно видеть, размер дивиденда равен $S_t - \Phi_n(t)$. Портфель, состоящий из форвардного контракта, имеет нулевую цену до момента t , а в момент t цена портфеля становится равной $S_t - \Phi_n(t)$. Отметим некоторые особенности данной «акции»: в отличие от реальных дивидендов, «дивиденды» у данной бумаги могут быть как положительными, так и отрицательными; кроме того, количество «акций» данного типа в портфеле может измениться только один раз – в момент заключения контракта.

Фьючерс. Определение фьючерсного контракта не отличается от форвардного, но при фьючерсном контракте в качестве посредника выступает биржа. Цену поставки актива (фьючерсную цену) будем обозначать $F_n(t)$. Биржа организует выполнение контракта таким образом, что при изменении фьючерсных цен с $F_n(t)$ на $F_{n+1}(t)$ со счета продавца актива на счет покупателя поступают денежные средства в размере $F_{n+1}(t) - F_n(t)$. Как и в случае форвардного контракта, мы можем рассматривать эти средства как выплату дивидендов в момент $n + 1$; сумма этих «дивидендов» равна $S_t - F_n(t)$.

Теорема 1.2 *Предположим, что существует мера $\tilde{\mathbf{P}}$, относительно которой дисконтированные цены акций $\tilde{S}_n$ - мартингал, а форвардные и фьючерсные цены равны соответственно*

$$\Phi_n^*(t) = S_n / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n}(B_n/B_t), \quad F_n^*(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} S_t, \quad (1.14)$$

тогда рынок, состоящий из банковского счета, акций, форвардных и фьючерсных контрактов, является безарбитражным.

Доказательство. Рассмотрим рынок, состоящий из активов четырех типов: банковского счета с ценами B_k , акции с ценами S_k^1 , форвардного

контракта с моментом заключения n_2 , сроком исполнения t_2 и фьючерсного контракта с моментом заключения n_3 , сроком исполнения t_3 . Обозначим соответствующие «дивиденды» через

$$\delta_n^2 = 1_{\{n=t_2\}} (S_{t_2}^1 - \Phi_{n_2}^*(t_2)), \quad \delta_n^3 = 1_{\{n_3 < n \leq t_3\}} (F_n^*(t_3) - F_{n-1}^*(t_3)).$$

Рассмотрим произвольную стратегию $\{\gamma_n^i\}$, $i = 0, \dots, 3$. Будем считать, что $N \geq t_2, t_3$. По формуле (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{X}_N &= X_0 + \sum_{n=1}^N \gamma_{n-1} (\Delta \tilde{S}_n + \tilde{\delta}_n) \\ &= X_0 + \sum_{n=1}^N \gamma_{n-1}^1 \Delta \tilde{S}_n^1 + \gamma_{n_2}^2 \tilde{\delta}_{t_2}^2 + \gamma_{n_3}^3 \sum_{n=n_3+1}^{t_3} \tilde{\delta}_n^3. \end{aligned}$$

Предположим, что $X_0 = 0$ и возьмем математическое ожидание по мере, относительно которой $\tilde{S}_n^1$ - мартингал, тогда

$$\tilde{\mathbf{E}} \tilde{X}_N = \tilde{\mathbf{E}} \gamma_{n_2}^2 \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \tilde{\delta}_{t_2}^2 + \sum_{n=n_3+1}^{t_3} \tilde{\mathbf{E}} \gamma_{n_3}^3 \alpha_n \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} \delta_n^3.$$

Сосчитаем условные ожидания:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \tilde{\delta}_{t_2}^2 &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{B_0}{B_{t_2}} (S_{t_2}^1 - \Phi_{n_2}^*(t_2)) = \frac{B_0}{B_{n_2}} S_{n_2}^1 - \Phi_{n_2}^*(t_2) \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{B_0}{B_{t_2}} \\ &= \frac{B_0}{B_{n_2}} S_{n_2}^1 - \frac{S_{n_2} B_0}{\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{B_{n_2}}{B_{t_2}}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{1}{B_{t_2}} = 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} \delta_n^3 &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} (F_n^*(t_3) - F_{n-1}^*(t_3)) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} S_{t_3}^1 - F_{n-1}^*(t_3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{\mathbf{E}} \tilde{X}_N = 0$. Если предположить, что $X_N \geq 0$, то отсюда следует, что $X_N = 0$ п.н. и это означает, что рынок безарбитражный.

Замечание 1. Из теоремы следует, что $F_{n-1}^*(n) = S_{n-1}(1 + r_n)$, что согласуется с обозначениями в формуле (1.6).

Замечание 2. Если B_n - детерминированная последовательность, то несложно показать, что $F_n^*(t) = \Phi_n^*(t)$.

Замечание 3. В общем случае, могут существовать и другие безарбитражные цены, но если B_n - детерминированная последовательность и рынок безарбитражный, то $F_n(t) = \Phi_n(t) = F_n^*(t) = \Phi_n^*(t)$. Действительно, если предположить, что при некотором k существует множество $\Omega_k \in \mathcal{F}_k$, такое, что $\mathbf{P}(\Omega_k) > 0$ и для $\omega \in \Omega_k$ $\Phi_k(t) < \Phi_k^*(t)$, то можно использовать стратегию, при которой

$$\gamma_n^0 = S_k^1/B_k, \quad \gamma_n^1 = -1, \quad \gamma_n^2 = 1 \quad \text{для } n \geq k \quad \text{и} \quad \omega \in \Omega_k,$$

в противном случае полагаем все $\gamma_n^i = 0$. Эта стратегия самофинансируемая и с положительной вероятностью

$$X_t = (S_k^1/B_k) \cdot B_t + (-1) \cdot S_t^1 + 1 \cdot (S_t^1 - \Phi_k^{(t)}) = \Phi_k^*(t) - \Phi_k(t) > 0,$$

что противоречит безарбитражности.

Замечание 4. Рассмотрим в качестве первичного актива облигацию со сроком погашения $T > t$. Цена облигации в момент времени n равна $P_n(T) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{n+1,T}$, поэтому, применяя теорему, получим, что безарбитражные форвардные и фьючерсные цены на облигацию равны соответственно

$$\Phi_n^*(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{n+1,T} / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{n+1,t} \quad \text{и} \quad F_n^*(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{t+1,T}.$$

1.5 Опцион европейского типа

Опцион - это некоторый контракт, в котором

- оговорены покупатель и продавец контракта;
- продавец контракта имеет определенные в контракте финансовые обязательства перед покупателем (например, купить или продать некоторый актив в будущем по определенной цене);

- покупатель имеет право исполнить или не исполнить данный контракт.

Основными видами опциона являются опцион покупки (call option) и опцион продажи (put option). Опцион покупки характеризуется ценой поставки актива (strike price) K и датой исполнения (expiration date) N . Если в момент времени N цена актива $S_N > K$, то покупателю (обладателю) опциона выгодно его исполнить. Продавец опциона при этом может вместо того, чтобы поставлять актив по цене K , выплатить денежные средства в размере $S_N - K$, а обладатель опциона добавив к ним денежные средства в размере K , приобрести актив по рыночной цене. Если же в момент времени N цена актива $S_N \leq K$, обладателю опциона невыгодно его исполнить и формально продавец опциона выплачивает 0 денежных средств. Объединяя оба эти случая, можно говорить о том, что опцион покупки полностью характеризуется платежной функцией $f = (S_N - K)^+$. Аналогичные рассуждения показывают, что платежная функция опциона продажи равна $f = (K - S_N)^+$.

В настоящее время имеется большое количество различных видов опционов («экзотические» опционы), платежная функция которых зависит от траектории последовательности $\{S_n\}$, например, для «азиатского» опциона цена исполнения равна среднему значению по траектории, для опциона «с последствием» - максимальному или минимальному значению. Мы будем предполагать, что платежная функция f - это $\mathcal{F}_N$ -измеримая случайная величина. Через $\tilde{f}$ будем обозначать дисконтированную платежную функцию: $\tilde{f} = \alpha_N f$.

1.5.1 Хеджирование. Цена опциона.

Хеджем (от hedge - ограждать) называется такая стратегия, которая в каком-то смысле ограждает продавца от потерь, связанных с выплатами по платежной функции. Если определено множество хеджей Π , то справедливой ценой опциона называется величина $\mathcal{C}(f) = \inf_{\pi \in \Pi} X_0^\pi$.

Определим хедж как стратегию $\pi = (X_0, \{\gamma_n\})$, при которой $X_N^\pi \geq f$ п.н. Пусть существует эквивалентная мартингальная мера $\tilde{\mathbf{P}}$ и π явля-

ется хеджем, тогда из данного определения и леммы 1.2 следует, что $\tilde{X}_n^\pi$ является мартингалом по мере $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\tilde{X}_0^\pi = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_N^\pi \geq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$. Отсюда получаем, что $\mathcal{C}(f) \geq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

Теорема 1.3 В биномиальной модели рынка $\mathcal{C}(f) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

Доказательство. Достаточно построить хедж с начальным капиталом $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$. Рассмотрим мартингал $M_n = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{f}|\mathcal{F}_n)$; он является функцией от величин $S_1, \dots, S_n$: $M_n = m_n(S_1, \dots, S_n)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= m_n(S_1, \dots, S_n(u))\tilde{p}_n + m_n(S_1, \dots, S_n(d))(1 - \tilde{p}_n) \\ &= m_{n-1}(S_1, \dots, S_{n-1}),\end{aligned}$$

где $\tilde{p}_n$ имеет вид (1.10). Отсюда следует, что

$$\frac{m_n(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n(u)) - m_{n-1}}{\tilde{S}_n(u) - \tilde{S}_{n-1}} = \frac{m_n(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n(d)) - m_{n-1}}{\tilde{S}_n(d) - \tilde{S}_{n-1}},$$

т.е. выражение $(M_n - M_{n-1})/(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})$ не зависит от S_n , а является функцией только от $S_1, \dots, S_{n-1}$:

$$(M_n - M_{n-1})/(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) = \mu_{n-1}(S_1, \dots, S_{n-1}).$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\Delta M_n = \mu_{n-1} \Delta \tilde{S}_n. \quad (1.15)$$

Заметим, что μ_n является $\mathcal{F}_n$ -измеримой случайной величиной, поэтому можно определить стратегию $\pi = (\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}, \{\mu_n\})$, тогда из формулы (1.15) следует, что $\tilde{X}_n^\pi = M_n$ и, следовательно,

$$X_N^\pi = f, \quad (1.16)$$

т.е. π это хедж и, значит, $\mathcal{C}(f) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

Замечание 1. Равенство $\mathcal{C}(f) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$ верно не только для биномиальной модели, но и в тех случаях, когда выполняется равенство (1.16).

Безарбитражные модели рынка, в которых (1.16) выполнено для любой ограниченной f и некоторой стратегии $\pi(f)$, называются полными. Для таких моделей, также как и для биномиальной модели, существует единственная мартингальная мера [4]. Из равенства (1.16) следует, в частности, что на полном рынке платежная функция имеет представление

$$\tilde{f} = \mathbf{E}\tilde{f} + \sum_{n=1}^N \gamma_{n-1} \Delta \tilde{S}_n. \quad (1.17)$$

Замечание 2. Представление цены опциона в виде математического ожидания от платежной функции дает важное для практики соотношение между ценой опциона покупки $\mathcal{C}$ и ценой опциона продажи $\mathcal{P}$. Поскольку

$$(S_N - K)^+ = (S_N - K) + (S_N - K)^- = (S_N - K) + (K - S_N)^+,$$

то умножая на коэффициент дисконтирования и беря ожидание от обеих частей равенства, получим

$$\mathcal{C} = S_0 - K\tilde{\mathbf{E}}\alpha_N + \mathcal{P}. \quad (1.18)$$

Это соотношение известно как «put-call parity».

Свойство полноты является довольно сильным ограничением имодели, которые используются на практике, часто не обладают этим свойством. На неполных рынках хедж можно определить как стратегию, минимизирующую среднеквадратичное отклонение $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{X}_N^\pi - \tilde{f})^2$ по выбранной мартингальной мере. В случае полного рынка данное определение дает те же цену и стратегию, что и теорема 1.3.

Будем считать, что $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}^2 < \infty$ и рассматривать такие стратегии, для которых $\tilde{X}_n^\pi$ является квадратично интегрируемым мартингалом.

Теорема 1.4 *Оптимальная по среднеквадратичному критерию стратегия имеет вид*

$$\pi = \left(\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}, \left\{ (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \Delta \tilde{S}_{n+1} \tilde{f}) / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} (\Delta \tilde{S}_{n+1})^2 \right\} \right). \quad (1.19)$$

Доказательство. Обозначим $V_n = \tilde{X}_n^\pi - M_n$, где $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}$. Последовательность V_n является мартингалом, поэтому

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{X}_N^\pi - \tilde{f})^2 = \tilde{\mathbf{E}}V_N^2 = V_0^2 + \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_n)^2.$$

Слагаемое V_0 равно нулю при $X_0^\pi = M_0 = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$; математическое ожидание $\tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_n)^2$ представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_n)^2 &= \tilde{\mathbf{E}}(\gamma_{n-1}\Delta\tilde{S}_n - \Delta M_n)^2 \\ &= \tilde{\mathbf{E}}\left(\gamma_{n-1}^2\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}(\Delta\tilde{S}_n)^2 - 2\gamma_{n-1}\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n\Delta M_n\right) + \tilde{\mathbf{E}}(\Delta M_n)^2. \end{aligned}$$

Данное выражение достигает своего минимума при

$$\gamma_{n-1} = (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n\Delta M_n)/\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}(\Delta\tilde{S}_n)^2,$$

причем, числитель может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n\Delta M_n &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n}\tilde{f} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\tilde{f}) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n\tilde{f} - (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n)(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\tilde{f}) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}\Delta\tilde{S}_n\tilde{f}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1.5.2 Пример расчета опциона

Рассмотрим следующий биномиальный В-С рынок: текущая цена некоторого актива равна $S_0 = 90$; через год цена может либо уменьшиться до $S_1(d) = 75$, либо увеличиться до $S_1(u) = 120$. Для простоты будем предполагать, что процентная ставка равна нулю. Сосчитаем цену опциона покупки с ценой исполнения равной текущей цене, т.е. $K = 90$. Мартингальная мера определяется согласно формуле (1.9):

$$\tilde{p} = \mathbf{P}(S_1 = S_1(u)) = \frac{F_0 - S_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)} = \frac{90 - 75}{120 - 75} = 1/3.$$

Из теоремы 1.3 следует, что цена опциона равна

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \tilde{p}[S_1(u) - K]^+ + (1 - \tilde{p})[S_1(d) - K]^+ \\ &= 1/3(120 - 90)^+ + 2/3(75 - 90)^+ = 10.\end{aligned}$$

Хеджирующую стратегию определим из формулы (1.15): $\gamma_0 = \frac{\Delta M_1}{\Delta S_1}$. Поскольку $M_1 = f$ и $M_0 = \mathcal{C}$, то

$$\gamma_0 = \frac{f(S_1(u)) - \mathcal{C}}{S_1(u) - S_0} = \frac{30 - 10}{120 - 90} = 2/3.$$

Нетрудно видеть, что при любом развитии событий продавец опциона не имеет ни убытков, ни прибыли. Экономическое значение опциона можно понять, встав на точку зрения покупателя опциона: вместо первоначального разброса цен 75-120 обладатель опциона имеет перед собой более узкий диапазон: 85-100; таким образом, цена покупки актива становится более определенной.

1.5.3 Существенная выборка

Пусть $\tilde{p}_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$ - переходные плотности, порожденные мартингальной мерой $\tilde{\mathbf{P}}$, $f(x_1, \dots, x_N)$ - платежная функция, тогда цена опциона выражается как N -мерный интеграл

$$\mathcal{C} = \int_{X^N} dx_1 \dots dx_N \tilde{p}_1(x_1) \dots \tilde{p}_N(x_1, \dots, x_{N-1}; x_N) \tilde{f}(x_1, \dots, x_N),$$

для вычисления которого можно применить метод Монте-Карло.

Пусть $p_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$ - также переходные плотности, обладающие тем свойством, что $p_1 \dots p_N > 0$ при $\tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_N \tilde{f} > 0$, тогда можно определить оценку метода Монте-Карло

$$\check{C}(p) = \tilde{f} \prod_{n=1}^N \frac{\tilde{p}_n}{p_n}.$$

Положим

$$p_n^* = \tilde{p}_n M_n / M_{n-1},$$

где $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}$. Величины p_n^* неотрицательны; и в силу того, что последовательность M_n - является мартингалом относительно $\tilde{P}$, имеем

$$\int_X p_n^*(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) dx_n = 1.$$

Подставляя данные переходные плотности в выражение для $\check{C}(p)$ и произведя сокращения, получим, что $\check{C}(p^*) = \mathcal{C}$. Таким образом, переходные вероятности p_n^* дают нулевую дисперсию (независимо от того, является рынок полным или нет).

1.6 Опцион американского типа

В отличие от опциона европейского типа, опцион американского типа может быть исполнен в любой момент времени до оговоренного в контракте срока исполнения, поэтому он описывается не одной платежной функцией, а набором платежных функций $\{f_n\}$, соответствующих каждому моменту времени n в пределах срока действия контракта. Например, платежные функции опциона покупки равны $(S_n - K)^+$, а платежные функции опциона продажи равны $(K - S_n)^+$. В общем случае будем предполагать, что платежные функции f_n являются $\mathcal{F}_n$ -измеримыми случайными величинами.

1.6.1 Цена опциона американского типа

Докажем предварительно некоторые леммы. Напомним, что случайная величина τ , принимающая значения $0, 1, \dots, N$, называется марковским моментом, если $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ для любого n . Определим σ -алгебру $\mathcal{F}_\tau = \{A : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Лемма 1.3 Пусть дана последовательность $\mathcal{F}_n$ -измеримых случайных величин ξ_n , $n = 1, \dots, N$, тогда

- 1) величина ξ_τ - $\mathcal{F}_\tau$ -измерима;
- 2) если ξ_n - мартингал и $\tau_1 \leq \tau_2 \leq N$, то

$$\mathbf{E}(\xi_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = \xi_{\tau_1}. \quad (1.20)$$

Доказательство. Нужно показать, что для любого борелевского множества B событие $\{\xi_\tau \in B\}$ принадлежит $\mathcal{F}_\tau$. Это эквивалентно тому, что для любого n $\{\xi_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Но последнее множество можно представить в виде объединения $\mathcal{F}_n$ -измеримых множеств $\bigcup_{k \leq n} \{\xi_k \in B\} \cap \{\tau = k\}$, откуда и следует первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения надо показать, что

$$\int_A \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} = \int_A \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} \quad (1.21)$$

для любого $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Сначала докажем (1.21) для $B \subset \{\tau_1 = n\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_B \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} &= \int_B \xi_n d\mathbf{P} = \int_B \xi_{\tau_2 \wedge n} d\mathbf{P} = \int_{B \cap \{\tau_2 \leq n\}} \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} + \int_{B \cap \{\tau_2 > n\}} \xi_n d\mathbf{P} \\ &= \int_{B \cap \{\tau_2 \leq n\}} \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} + \int_{B \cap \{\tau_2 > n\}} \xi_{n+1} d\mathbf{P} = \int_B \xi_{\tau_2 \wedge (n+1)} d\mathbf{P} = \dots = \int_B \xi_{\tau_2} d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Для произвольного $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ получаем

$$\int_A \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} = \sum_{n=0}^N \int_{A \cap \{\tau_1 = n\}} \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} = \sum_{n=0}^N \int_{A \cap \{\tau_1 = n\}} \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} = \int_A \xi_{\tau_2} d\mathbf{P}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4 *Определим случайные величины*

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n^{(N)} &= \operatorname{ess\,sup}_{n \leq \tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}_\tau, \\ \tilde{Z}_n^{(N)} &= \begin{cases} \tilde{f}_N, & n = N, \\ \max \left(\tilde{f}_n, \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{Z}_{n+1}^{(N)} \right), & n < N, \end{cases} \\ \tilde{W}_n^{(N)} &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}_{\tau_n}, \end{aligned}$$

где $\tau_n = \min \left\{ k : n \leq k \leq N, \quad \tilde{Z}_k^{(N)} = \tilde{f}_k \right\}$.

Имеет место равенство $\tilde{Y}_n^{(N)} = \tilde{Z}_n^{(N)} = \tilde{W}_n^{(N)}$.

Доказательство. Очевидно, что $\widetilde{W}_n^{(N)} \leq \widetilde{Y}_n^{(N)}$. Покажем, что верно $\widetilde{Y}_n^{(N)} \leq \widetilde{Z}_n^{(N)}$. Для $n = N$ это следует из равенства $\widetilde{Y}_N^{(N)} = \widetilde{f}_N$. Предположим, что выполнено неравенство $\widetilde{Y}_{n+1}^{(N)} \leq \widetilde{Z}_{n+1}^{(N)}$ и возьмем произвольный момент τ , такой, что $n \leq \tau \leq N$.

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{f}_\tau = 1_{\{\tau=n\}} \widetilde{f}_n + 1_{\{\tau>n\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n+1}} \widetilde{f}_\tau.$$

Из индукционного предположения следует, что $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n+1}} \widetilde{f}_\tau \leq \widetilde{Y}_{n+1}^{(N)} \leq \widetilde{Z}_{n+1}^{(N)}$. Поэтому,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{f}_\tau \leq 1_{\{\tau=n\}} \widetilde{f}_n + 1_{\{\tau>n\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{Z}_{n+1}^{(N)} \leq \max \left(\widetilde{f}_n, \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{Z}_{n+1}^{(N)} \right) = \widetilde{Z}_n^{(N)}.$$

Беря супремум по τ , получим, что $\widetilde{Y}_n^{(N)} \leq \widetilde{Z}_n^{(N)}$.

Остается показать, что $\widetilde{Z}_n^{(N)} \leq \widetilde{W}_n^{(N)}$. Это неравенство выполнено для $n = N$ и пусть $\widetilde{Z}_{n+1}^{(N)} \leq \widetilde{W}_{n+1}^{(N)}$, тогда

$$\widetilde{Z}_n^{(N)} = 1_{\{\widetilde{f}_n = \widetilde{Z}_n^{(N)}\}} \widetilde{f}_n + 1_{\{\widetilde{f}_n < \widetilde{Z}_n^{(N)}\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{Z}_{n+1}^{(N)}.$$

Используя индукционное предположение, а также то, что $\{\widetilde{f}_n = \widetilde{Z}_n^{(N)}\} = \{\tau_n = n\}$, получим

$$\widetilde{Z}_n^{(N)} \leq 1_{\{\tau_n = n\}} \widetilde{f}_n + 1_{\{\tau_n > n\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{W}_{n+1}^{(N)}.$$

Заметим, что $\tau_n = \tau_{n+1}$ на множестве $\{\tau_n > n\}$, поэтому

$$1_{\{\tau_n > n\}} \widetilde{W}_{n+1}^{(N)} = 1_{\{\tau_n > n\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n+1}} \widetilde{f}_{\tau_{n+1}} = 1_{\{\tau_n > n\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n+1}} \widetilde{f}_{\tau_n}.$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{Z}_n^{(N)} \leq 1_{\{\tau_n = n\}} \widetilde{f}_{\tau_n} + 1_{\{\tau_n > n\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{f}_{\tau_n} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{f}_{\tau_n} = \widetilde{W}_n^{(N)}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что в момент τ_0 текущий платеж впервые становится не меньше, чем ожидаемый платеж в будущем. Поэтому с точки зрения

покупателя опциона τ_0 - рациональный момент исполнения этого опциона. В дальнейшем момент τ_0 будем также обозначать τ^* .

Отметим, что в момент τ_0 текущий платеж впервые становится не меньше, чем ожидаемый платеж в будущем. Поэтому с точки зрения покупателя опциона τ_0 - рациональный момент исполнения этого опциона. В дальнейшем момент τ_0 будем также обозначать τ^* .

Хеджирование на полном рынке. Предположим что рынок полный; в качестве множества хеджей Π рассмотрим стратегии π такие, что для любого $n \leq N$ выполнено $X_n^\pi \geq f_n$. Справедливая цена $\mathcal{C}$ определяется как обычно: $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\{f_n\}) = \inf_{\pi \in \Pi} X_0^\pi$.

Поскольку $\tilde{X}_k^\pi$ является мартингалом, то для любых марковских моментов τ, τ' , согласно лемме 1.3 имеет место равенство $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_\tau^\pi = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_{\tau'}^\pi$. Положив $\tau' = 0$, получим, что $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_\tau^\pi = \tilde{X}_0^\pi$. Пусть теперь π является хеджем, тогда $\tilde{X}_\tau^\pi \geq \tilde{f}_\tau$. Взяв математическое ожидание в предыдущем неравенстве, получим, что $X_0^\pi \geq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau$. Поскольку неравенство выполняется для любого τ , то оно выполняется и для супремума по τ : $X_0^\pi \geq \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{C} \geq \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau. \quad (1.22)$$

Теорема 1.5 *Предположим, что рынок полный, тогда $\mathcal{C} = \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\tilde{Y}_n^{(N)}$ из леммы 1.4, которую представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n^{(N)} &= \tilde{Y}_0^{(N)} + \sum_{k=1}^n \left(\tilde{Y}_k^{(N)} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{Y}_k^{(N)} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\tilde{Y}_{k-1}^{(N)} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{Y}_k^{(N)} \right) \\ &= M_n - A_n. \end{aligned}$$

Из леммы 1.4 следует, что

$$\tilde{Y}_{k-1}^{(N)} = \max(\tilde{f}_{k-1}, \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{Y}_k^{(N)}) \geq \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{Y}_k^{(N)}, \quad (1.23)$$

поэтому в последовательности A_n каждое слагаемое неотрицательно, и все они $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримы; следовательно, A_n - неубывающая последовательность и величина A_n - $\mathcal{F}_{n-1}$ -измерима.

Последовательность M_n представляет собой мартингал; поскольку $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} M_N$, то из (1.17) следует, что M_n может быть представлена в виде $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_{k-1} \Delta \tilde{S}_k$, причем $M_0 = \tilde{Y}_0^{(N)} = \sup_{\tau} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_{\tau}$. Рассмотрим стратегию $\pi^* = (M_0, \{\gamma_n\})$ и покажем, что она является хеджем. Действительно, поскольку $\tilde{Y}_n^{(N)} \geq \tilde{f}_n$, то

$$\tilde{X}_n^{\pi^*} = \tilde{X}_0^{\pi^*} + \sum_{k=1}^n \gamma_{k-1} \Delta \tilde{S}_k = M_n = \tilde{Y}_n^{(N)} + A_n \geq \tilde{Y}_n^{(N)} \geq \tilde{f}_n.$$

Таким образом, мы нашли хедж с начальным капиталом $\sup_{\tau} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_{\tau}$. Это означает, что $C(f) \leq \sup_{\tau} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_{\tau}$. Вместе с неравенством (1.22) это доказывает утверждение теоремы.

Рассмотрим марковский момент τ^* ; при $k < \tau^*$

$$\tilde{X}_k^{\pi^*} = M_k \geq \tilde{Y}_k^{(N)} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Y}_{k+1}^{(N)} > \tilde{f}_k.$$

Из этого неравенства также следует, что

$$\begin{aligned} A_{\tau^*} &= \sum_{k=1}^{\tau^*} (\tilde{Y}_{k-1}^{(N)} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{Y}_k^{(N)}) = 0, \\ \tilde{X}_{\tau^*}^{\pi^*} &= M_{\tau^*} = \tilde{Y}_{\tau^*}^{(N)} + A_{\tau^*} = \tilde{Y}_{\tau^*}^{(N)} = \tilde{f}_{\tau^*}. \end{aligned}$$

Таким образом, на полном рынке рациональность исполнения опциона в момент τ^* подкрепляется следующим соображением: обладателю опциона нерационально исполнять его в момент $n < \tau^*$, т. к. затратив на покупку опциона $X_0^{\pi^*}$ денежных средств, он получит в результате исполнения доход в размере $\tilde{f}_n$, тогда как используя стратегию π^* с тем же начальным капиталом, он мог бы получить доход в размере $X_n^{\pi^*} > \tilde{f}_n$.

Хеджирование в среднеквадратичном. На неполном рынке определим хедж как стратегию, при которой достигает минимума выра-

жение $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{X}_{\tau^*}^\pi - \tilde{f}_{\tau^*})^2$, в котором ожидание берется по некоторой мартингальной мере. Введем мартингалы $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}_{\tau^*}$, $V_n = \tilde{X}_n^\pi - M_n$, тогда $\tilde{X}_{\tau^*}^\pi - \tilde{f}_{\tau^*} = V_{\tau^*}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}V_{\tau^*}^2 &= \tilde{\mathbf{E}}(V_0 + \sum_{n=1}^{\tau^*} \Delta V_n)^2 = V_0^2 + \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_n)^2 1_{\{n \leq \tau^*\}} \\ &+ 2V_0 \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{E}}\Delta V_n 1_{\{n \leq \tau^*\}} + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=n+1}^N \tilde{\mathbf{E}}\Delta V_n \Delta V_k 1_{\{k \leq \tau^*\}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Поскольку событие $\{n \leq \tau^*\} - \mathcal{F}_{n-1}$ -измеримо, то

$$\tilde{\mathbf{E}}\Delta V_n 1_{\{n \leq \tau^*\}} = \tilde{\mathbf{E}}1_{\{n \leq \tau^*\}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} \Delta V_n = 0.$$

Таким образом, последние две суммы в (1.24) равны нулю и

$$\tilde{\mathbf{E}}V_{\tau^*}^2 = (X_0 - M_0)^2 + \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{E}}1_{\{n \leq \tau^*\}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} (\gamma_{n-1} \Delta \tilde{S}_n - \Delta M_n)^2.$$

Минимум данного выражения достигается при выборе $X_0 = M_0 = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_{\tau^*}$ и $\gamma_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \Delta \tilde{S}_{n+1} \tilde{f}_{\tau^*} / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} (\Delta \tilde{S}_{n+1})^2$ при $n < \tau^*$.

1.6.2 Марковский случай

Будем предполагать, что цены S_n образуют марковский процесс, r_n - детерминированная последовательность, платежные функции имеют вид $f_n = f_n(S_n)$. Покажем, что тогда $\tilde{Y}_n^{(N)}(S_0, \dots, S_n) = \tilde{Y}_n^{(N)}(S_n)$. Действительно, $\tilde{Y}_N^{(N)} = \alpha_N f_N(S_N)$. Пусть $\tilde{Y}_{n+1}^{(N)} = \tilde{Y}_{n+1}^{(N)}(S_{n+1})$, т.е. $\tilde{Y}_{n+1}^{(N)}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\geq n+1} = \sigma\{S_k, k > n\}$, тогда по свойству марковских процессов

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n^{(N)} &= \max \left(\alpha_n f_n(S_n), \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{Y}_{n+1}^{(N)} \right) \\ &= \max \left(\alpha_n f_n(S_n), \tilde{\mathbf{E}}_{n, S_n} \tilde{Y}_{n+1}^{(N)} \right) = \tilde{Y}_n^{(N)}(S_n). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что процесс S_n - однородный, $f_n(x) = f(x)$, $r_n = r$, тогда α_n имеет вид α^n . В этом случае удобно определить функции $Y_m^{(N)}(x) = \alpha^{m-N} \tilde{Y}_{N-m}^{(N)}(x)$; индекс m означает число шагов до исполнения опциона. Из свойств функций $\tilde{Y}_n^{(N)}(x)$ следует, что

$$Y_m^{(N)}(x) = \begin{cases} f(x), & m = 0, \\ \max\left(f(x), \alpha \tilde{\mathbf{E}}_x Y_{m-1}^{(N)}(S_1)\right), & m > 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

и, значит, $Y_m^{(N)}(x)$ не зависит от N . Кроме того,

$$Y_m(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq m} \tilde{\mathbf{E}}_x \alpha^\tau f(S_\tau) = \tilde{\mathbf{E}}_x \alpha^{\tau_m} f(S_{\tau_m}),$$

где $\tau_m = \min\{n : 0 \leq n \leq m, Y_{m-n}(S_n) = f(S_n)\}$. Мы можем определить «области остановки» $D_m = \{x : Y_m(x) = f(x)\}$ и области «продолжения наблюдений» $C_m = X \setminus D_m$. Рациональный момент исполнения является моментом попадания цены в область остановки:

$$\tau_m = \min\{n \leq m : Y_{m-n}(S_n) = f(S_n)\} = \min\{n \leq m : S_n \in D_{m-n}\}.$$

Отметим, что области остановки становятся шире по мере того, как число шагов m до момента окончания опциона уменьшается. Действительно, поскольку $Y_0(x) = f(x)$, то $Y_1(x) = \max(f(x), \tilde{\mathbf{E}}_x f(S_1)) \geq Y_0(x)$ и далее

$$Y_{m+1}(x) = \max(f(x), \tilde{\mathbf{E}}_x Y_m(S_1)) \geq \max(f(x), \tilde{\mathbf{E}}_x Y_{m-1}(S_1)) = Y_m(x).$$

Отсюда $D_{m+1} = \{x : Y_{m+1}(x) = f(x)\} \subset \{x : Y_m(x) = f(x)\} = D_m$. Ясно, что D_0 совпадает со всем пространством состояний: $D_0 = X$.

Рассмотрим вопрос о цене стандартных опционов. Очевидно, что цена опционов американского типа $\mathcal{C}_a(f)$ не меньше цены соответствующего опциона европейского типа $\mathcal{C}_e(f)$, но, оказывается, что имеет место такой неожиданный результат.

Теорема 1.6 *Цена опциона покупки американского типа равна цене опциона покупки европейского типа.*

Доказательство. Положим $\xi_n = \alpha^n(S_n - K)^+$. Используя неравенство Йенсена, и тот факт, что последовательность $\alpha^n S_n$ является мартингалом, получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \xi_{n+1} &\geq [\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha^{n+1}(S_{n+1} - K)]^+ = [\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha^{n+1} S_{n+1} - \alpha^{n+1} K]^+ \\ &= [\alpha^n S_n - \alpha^n K + \alpha^n(1 - \alpha)K]^+ \geq \alpha^n(S_n - K)^+ = \xi_n.\end{aligned}$$

Из этого неравенства аналогично доказательству равенства (1.20) получаем что для любых марковских моментов τ и τ_1 , таких, что $\tau \leq \tau_1$ выполнено $\tilde{\mathbf{E}}\xi_\tau \leq \tilde{\mathbf{E}}\xi_{\tau_1}$. Взяв $\tau_1 \equiv N$, получим $\tilde{\mathbf{E}}f_\tau \leq \tilde{\mathbf{E}}f_N = C_e(f)$. Поскольку τ - произвольный момент, то $C_a(f) = \sup_\tau \tilde{\mathbf{E}}f_\tau \leq C_e(f)$. Это неравенство доказывает утверждение теоремы.

В общем случае, для вычисления цены американского опциона строится некоторое дерево цен первичного актива и цена опциона в узлах дерева вычисляется по формуле (1.25). Данный алгоритм может быть очень трудоемким, если S_n - это многомерный вектор, т.к. число возможных узлов быстро растет. Поэтому в данном случае имеет смысл использовать метод «стохастической сетки», излагаемый далее.

1.6.3 Метод стохастической сетки

Предположим, что цены S_n образуют марковский процесс с переходными вероятностями $p_n(x, dy)$ при переходе из состояния S_{n-1} в состояние S_n ; платежная функция опциона имеет вид $f_n = f_n(S_n)$. Обозначим $\tilde{f}_n(x) = \alpha_n f_n(x)$ и последовательно определим функции $\tilde{Y}_n(x)$:

$$\tilde{Y}_N(x) = \tilde{f}_N(x), \quad \tilde{Y}_n(x) = \max\left(\tilde{f}_n(x), \tilde{\mathbf{E}}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1})\right).$$

Из предыдущего параграфа следует, что цена опциона имеет вид

$$C(\{f_n\}) = C = \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau(S_\tau) = \tilde{Y}_0(S_0).$$

Построим на каждом шаге n набор случайных точек $\bar{x}_n = \{x_{n,i}\}_{i=1}^M$ («сетку») как марковский процесс с переходными вероятностями

$$\bar{r}_n(\bar{x}, d\bar{y}) = r_{n,1}(\bar{x}, dy_1) \dots r_{n,M}(\bar{x}, dy_M). \quad (1.26)$$

Относительно $r_{n,j}(\bar{x}, dy)$ будем предполагать, что определены плотности

$$\rho_{n,j}(\bar{x}, x, y) = \frac{p_n(x, dy)}{r_{n,j}(\bar{x}, dy)}.$$

Укажем некоторые варианты переходных вероятностей:

1) независимые траектории, т. е.

$$r_{n,j}(\bar{x}, dy) = p_n(x_j, dy);$$

2) усредненные плотности; в этом случае

$$r_{n,j}(\bar{x}, dy) = \frac{1}{M} \sum_i p_n(x_i, dy). \quad (1.27)$$

Далее для краткости введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \rho_n(x, j) &= \rho_{n,j}(\bar{x}_{n-1}, x, x_{n,j}), \quad \rho_n(i, j) = \rho_n(x_{n-1,i}, j), \\ \check{Y}_n(j) &= \check{Y}_n(x_{n,j}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Построим на сетке случайные величины $\check{Y}_n(x)$: положим $\check{Y}_N(x) = \tilde{f}(x)$,

$$\check{Y}_n(x) = \max \left(\tilde{f}_n(x), \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \rho_{n+1}(x, j) \check{Y}_{n+1}(j) \right),$$

где, аналогично предыдущему, положено $\check{Y}_{n+1}(j) = \check{Y}_{n+1}(x_{n+1,j})$.

Если считать, что для каждого n заданы случайные величины j_n , принимающие с равными вероятностями значения $1, \dots, M$ и независимые в совокупности и по отношению к ранее введенным величинам, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\check{Y}_n(x) = \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right).$$

Теорема 1.7 *Величина $\check{Y}_0(S_0)$ является оценкой сверху для цены опциона, а именно:*

$$\mathbf{E} \check{Y}_0(S_0) \geq \tilde{Y}_0(S_0).$$

Доказательство. Введем индукционное предположение: для любых n и x выполнено

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \check{Y}_n(x) \geq \tilde{Y}_n(x).$$

Поскольку $\check{Y}_N(x) = \tilde{Y}_N(x) = \tilde{f}_N(x)$, то предположение верно для $n = N$. Докажем неравенство в предположении, что оно верно для $n + 1$. По неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \check{Y}_n(x) &= \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right) \\ &\geq \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right) \\ &= \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n+1}} \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

По индукционному предположению $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n+1}} \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \geq \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1})$, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \check{Y}_n(x) &\geq \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right) \\ &= \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right) = \tilde{Y}_n(x). \end{aligned}$$

Таким образом, индукционное предположение доказано, откуда при $n = 0$ и $x = S_0$, получим утверждение теоремы.

Покажем теперь состоятельность оценки.

Теорема 1.8 *Предположим, что для всех x, k, m ($k \leq m$) выполнено*

$$\mathbf{E}[\rho_k(x, j_k) \dots \rho_m(j_{m-1}, j_m) \tilde{Y}_m(j_m)]^2 < \infty, \quad (1.29)$$

тогда для любых x, n имеет место оценка $\mathbf{E}[\check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x)]^2 \leq C/M$, где C - некоторая константа.

Доказательство. Поскольку $|\max(a, b_1) - \max(a, b_2)| \leq |b_1 - b_2|$ для любых a, b_1, b_2 , то

$$\begin{aligned} |\check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x)| &\leq \left| \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right| \\ &\leq |\Delta_n(x)| + \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \left| \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right|, \quad (1.30) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_n(x) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}).$$

Итерируя неравенство (1.30), получим

$$\begin{aligned} \left| \check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x) \right| &\leq |\Delta_n(x)| + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{N-1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \dots \rho_k(j_{k-1}, j_k) |\Delta_k(j_k)|. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}_k$ σ -алгебру, порожденную $\mathcal{F}_k$ и величинами $j_1, \dots, j_k$. Возведя в квадрат последнее неравенство и беря математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x) \right)^2 &\leq (N-n) \left(\mathbf{E} \mathbf{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} \Delta_n^2(x) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=n+1}^{N-1} \mathbf{E} \rho_{n+1}^2(x, j_{n+1}) \dots \rho_k^2(j_{k-1}, j_k) \mathbf{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_k} \Delta_k^2(j_k) \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Поскольку $\mathbf{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_k} \Delta_k^2(j_k)$ является дисперсией суммы M независимых случайных величин $\frac{1}{M} \rho_{k+1}(j_k, j) \tilde{Y}_{k+1}(j)$, $j = 1, \dots, M$, то

$$\mathbf{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_k} \Delta_k^2(j_k) \leq \frac{1}{M} \mathbf{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_k} \rho_{k+1}^2(j_k, j_{k+1}) \tilde{Y}_{k+1}^2(j_{k+1}). \quad (1.33)$$

Подставляя (1.33) в (1.32), получим утверждение теоремы.

Замечание. Неравенство (1.31) для $n = 0$, $x = S_0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \left| \check{Y}_0(S_0) - \tilde{Y}_0(S_0) \right| &\leq |\Delta_0(S_0)| + \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_1(S_0, j_1) \dots \rho_k(j_{k-1}, j_k) |\Delta_k(j_k)|. \end{aligned} \quad (1.34)$$

В случае, когда r_n определяется (1.27), $\rho_1(S_0, j) = 1$ для любого j . Далее, $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_2(j_1, j) = 1$ также для любого j . Индукцией получаем, что

правая часть в (1.34) равна $\sum_{k=0}^{N-1} |\Delta_k(j_k)|$ и, следовательно,

$$\mathbf{E} \left(\check{Y}_0(S_0) - \tilde{Y}_0(S_0) \right)^2 \leq \frac{N}{M} \sum_{k=1}^N \mathbf{E} \rho_k^2(1, 1) \tilde{Y}_k^2(1). \quad (1.35)$$

В свою очередь, последнее математическое ожидание может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rho_k^2(1, 1) \tilde{Y}_k^2(1) &= \mathbf{E} \rho_k^2(j_{k-1}, 1) \tilde{Y}_k^2(1) = \mathbf{E} \frac{p^2(j_{k-1}, 1)}{r_{k,1}^2(\bar{x}_{k-1}, 1)} \tilde{Y}_k^2(1) = \\ &= \mathbf{E} \int_0^\infty dy \frac{p^2(j_{k-1}, y)}{r_{k,1}(\bar{x}_{k-1}, y)} \tilde{Y}_k^2(y) = \int_0^\infty dy \tilde{Y}_k^2(y) \mathbf{E} \frac{\sum_j p^2(x_{k-1,j}, y)}{\sum_j p(x_{k-1,j}, y)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для состоятельности этой оценки достаточно, чтобы для любого k

$$\int_0^\infty dy \tilde{Y}_k^2(y) \mathbf{E} \frac{\sum_j p^2(x_{k-1,j}, y)}{\sum_j p(x_{k-1,j}, y)} < \infty. \quad (1.36)$$

Построим теперь оценку снизу для цены опциона. Пусть имеется траектория цен $S = (S_0, \dots, S_N)$, независимая от сетки. Положим

$$\bar{\tau} = \min\{n : \tilde{f}_n(S_n) = \check{Y}_n(S_n)\}.$$

Возьмем в качестве оценки для $\mathcal{C}$ величину $\bar{Y} = \tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}})$. Нетрудно видеть, что это оценка снизу:

$$\mathbf{E} \bar{Y} = \mathbf{E} \tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}}) \leq \sup_{\tau} \mathbf{E} \tilde{f}_{\tau}(S_{\tau}) = \mathcal{C}.$$

Покажем, что $\mathbf{E} \bar{Y} \rightarrow \mathcal{C}$ при $M \rightarrow \infty$.

Теорема 1.9 Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и дополнительно выполнено:

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{f}_n(S_n) = \mathbf{E}_{n, S_n} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right\} = 0. \quad (1.37)$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E} \tilde{f}_{\tau^*}^{1+\varepsilon}(S_{\tau^*}) < \infty, \quad (1.38)$$

тогда $\mathbf{E} \bar{Y} \rightarrow \mathcal{C}$ при $M \rightarrow \infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\mathbf{P}_S(\bar{\tau}(S) \neq \tau^*(S)) \rightarrow 0 \quad \text{п.н. по } S.$$

Зафиксируем траекторию $S' = (S'_1, \dots, S'_N)$, положим $\tau^* = \tau^*(S')$; тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} \neq \tau^*) &= \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} < \tau^*) + \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} > \tau^*) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \mathbf{P}_{S'}\left(\tilde{f}_k(S'_k) = \check{Y}_k(S'_k)\right) + 1_{\{\tau^* < N\}} \mathbf{P}_{S'}\left(\tilde{f}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) < \check{Y}_{\tau^*}(S'_{\tau^*})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \mathbf{P}_{S'}\left(\tilde{f}_k(S'_k) \geq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{k+1}(S'_k, j_{k+1}) \check{Y}_{k+1}(j_{k+1})\right) \\ &\quad + 1_{\{\tau^* < N\}} \mathbf{P}_{S'}\left(\tilde{f}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) < \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{\tau^*+1}(S'_{\tau^*}, j_{\tau^*+1}) \check{Y}_{\tau^*+1}(j_{\tau^*+1})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \mathbf{P}_{S'}(A_k) + \mathbf{P}_{S'}(A_*). \end{aligned}$$

Из (1.37) следует, что существует $\varepsilon(S')$, такая что для любого n

$$|\tilde{f}_n(S'_n) - \mathbf{E}_{n, S'_n} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1})| > \varepsilon. \quad (1.39)$$

Для $k < \tau^*$ выполнено $\mathbf{E}_{k, S'_k} \tilde{Y}_{k+1}(S_{k+1}) > \tilde{f}_k(S'_k)$. Более того, в силу (1.39)

$$\mathbf{E}_{k, S'_k} \tilde{Y}_{k+1}(S_{k+1}) \geq \tilde{f}_k(S'_k) + \varepsilon,$$

поэтому из события A_k следует, что

$$\mathbf{E}_{k, S'_k} \tilde{Y}_{k+1}(S_{k+1}) \geq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{k+1}(S'_k, j_{k+1}) \check{Y}_{k+1}(j_{k+1}) + \varepsilon.$$

Из свойств момента τ^* , (1.39) и того, что $\tau^* < N$, следует неравенство

$$\tilde{f}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) \geq \mathbf{E}_{\tau^*, S'_{\tau^*}} \tilde{Y}_{\tau^*+1}(S_{\tau^*+1}) + \varepsilon.$$

Таким образом, событие A_* содержится в событии

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{\tau^*+1}(S'_{\tau^*}, j_{\tau^*+1}) \tilde{Y}_{\tau^*+1}(j_{\tau^*+1}) \geq \mathbf{E}_{\tau^*, S'_{\tau^*}} \tilde{Y}_{\tau^*+1}(S_{\tau^*+1}) + \varepsilon.$$

Окончательно, имеем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} \neq \tau^*) &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}_{S'} \left(\left| \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{k+1}(S'_k, j_{k+1}) \tilde{Y}(j_{k+1}) - \mathbf{E}_{k, S'_k} \tilde{Y}_k(S_{k+1}) \right| \geq \varepsilon \right). \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.8 каждое слагаемое в последней сумме стремится к нулю и, значит, $\mathbf{P}_S(\bar{\tau} \neq \tau^*) \rightarrow 0$ для п.в. S . Далее, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{C} - \mathbf{E}\bar{Y} = \mathbf{E}\tilde{f}_{\tau^*}(S_{\tau^*}) - \mathbf{E}\tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}}) = \mathbf{E}(\tilde{f}_{\tau^*}(S_{\tau^*}) - \tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}}))1_{\{\bar{\tau} \neq \tau^*\}} \\ &\leq \mathbf{E}\tilde{f}_{\tau^*}(S_{\tau^*})1_{\{\bar{\tau} \neq \tau^*\}} \leq \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \tilde{f}_{\tau^*}^{1+\varepsilon}(S_{\tau^*}) \quad \mathbf{E}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \mathbf{P}_S(\bar{\tau} \neq \tau^*). \end{aligned}$$

Первое математическое ожидание конечно вследствие условия (1.38), второе стремится к нулю по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема доказана.

Глава 2

Модель геометрического броуновского движения

В работе Ф. Блэка и М. Шоулса [9] была рассмотрена простая диффузионная модель рынка (которая имеет решение в виде геометрического броуновского движения) и была получена аналитическая формула для цены европейского опциона покупки. Впоследствии были получены аналитические выражения и для цен других опционов. Подробное изложение этой модели можно найти в работах А. Н. Ширяева [3, 4]; оценка метода Монте-Карло для опционов американского типа, использующая стохастическое интегрирование по частям, разработана в статье В. Балли и др. [12]; состоятельность метода стохастической сетки для данной модели была доказана в работе П. Ботева [28].

Интегрирование по винеровскому процессу изложено в большом количестве монографий и учебников (см., например, [5, 18, 22, 27]). Приведем некоторые определения и результаты, которые используются в дальнейшем.

Случайный процесс ξ_t , определенный на промежутке $[0, T]$, называется прогрессивно измеримым ([18], гл. 6), если для каждого $t \leq T$ функция $f(s, \omega)$, рассматриваемая на множестве $[0, t] \times \Omega$, измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t$, где $\mathcal{B}_t$ - σ -алгебру борелевских множеств

на $[0, t]$. Для прогрессивно измеримого процесса f_t и марковского момента τ случайная величина f_τ является измеримой.

Интеграл по винеровскому процессу $I(t) = \int_0^t f_s dw_s$ определяется сначала для ступенчатых случайных функций f_s , затем предельным переходом распространяется на прогрессивно измеримые процессы из $L_2(\Lambda_t \times \mathbf{P})$, где Λ_t - лебегова мера на $\mathcal{B}_t$, и, наконец, на такие процессы, для которых $\int_0^t f_s^2 ds < \infty$ п.н.; для любого t существует $\mathcal{F}_t$ -измеримый вариант $I(t)$. Положим $\int_t^T f_s dw_s = I(T) - I(t)$. Приведем основные свойства стохастического интеграла:

- 1) $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \int_t^T f_s dw_s = 0$ п.н.;
- 2) $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} (\int_t^T f_s dw_s \int_t^T g_s dw_s) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \int_t^T f_s g_s ds$ п.н.
- 3) Если $w_t^{(i)}$ - независимые винеровские процессы, $i = 1, 2$, то

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \left(\int_t^T f_s dw_s^{(1)} \int_t^T g_s dw_s^{(2)} \right) = 0.$$

Процесс ξ_t на $[0, T]$ называется процессом Ито, если имеет место представление $\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a_s dw_s + \int_0^t b_s ds$, где a_s, b_s - прогрессивно измеримые процессы и $\int_0^T a_s^2 ds < \infty, \int_0^T |b_s| ds < \infty$ п.н. Часто представление для ξ_t записывается в виде $d\xi_t = a_t dw_t + b_t dt$. Процесс ξ_t определяет функции a_t и b_t однозначно п.в. по мере $\Lambda_T \times \mathbf{P}$ ([22], гл. 3). Если функция $u(t, x)$ имеет непрерывные первую производную u'_t по t , и вторую производную u''_{xx} по x , причем первые производные по x u'_x ограничены, тогда $\eta_t = u(t, \xi_t)$ является процессом Ито и имеет место формула Ито ([18], гл. 12):

$$d\eta_t = u'_x(t, \xi_t) a_t dw_t + [u'_t(t, \xi_t) + u'_x(t, \xi_t) b_t + 0.5 u''_{xx}(t, \xi_t) a_t^2] dt. \quad (2.1)$$

В случае, когда $\xi_t, b_t \in R^n, w_t \in R^m, a_t$ - матрица размером $n \times m$, формула остается верной, если под произведениями понимать соответствующие векторные аналоги; уточнения требует только последний член:

$$u''_{xx} a^2 \text{ преобразуется к виду } \sum_{i,j=1}^n u''_{x_i x_j} \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk}.$$

В модели геометрического броуновского движения предполагается,

что банковский счет B_t и цена акции S_t изменяются согласно уравнениям

$$dB_t/B_t = rdt \quad \text{и} \quad dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dw_t, \quad (2.2)$$

где w_t - винеровский процесс. Коэффициент σ называется волатильностью, а коэффициент μ - ожидаемой доходностью. Решения данных уравнений имеют вид

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad S_t = S_0 e^{\sigma w_t - 0.5\sigma^2 t + \mu t}.$$

Эта модель описывает основные свойства реального рынка и позволяет получить аналитическое решение для многих задач и провести качественное исследование их свойств.

Аналогично дискретному случаю вводится понятие стратегии (портфеля) $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ и цены портфеля $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$. Относительно β_t, γ_t предполагается, что это прогрессивно-измеримые процессы. Будем говорить, что стратегия является самофинансируемой, если выполняется равенство

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_t dB_t + \int_0^t \gamma_t dS_t,$$

аналогичное равенству (1.1).

2.1 Мартингальная мера

Будем рассматривать рынок на промежутке $[0, T]$, и считать, что σ -алгебры $\mathcal{F}_t$ порождены величинами $\{w_s\}_{s \leq t}$. Для произвольной постоянной b определим процесс $\rho_t = \exp(-bw_t - 0.5b^2 t)$ и возьмем условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \rho_t = e^{-bw_s - 0.5b^2 t} \mathbf{E}_{w_s} e^{-b(w_t - w_s)}.$$

Для нормальной случайной величины $\xi \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ имеет место равенство $\mathbf{E} e^\xi = e^{0.5 \sigma^2}$, поэтому условное математическое ожидание справа равно $e^{0.5b^2(t-s)}$ и, значит, $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \rho_t = \rho_s$, т.е. процесс ρ_t является мартингалом. Отсюда, в частности, следует, что $\mathbf{E} \rho_t = \rho_0 = 1$ и мы можем

построить новую меру на $\mathcal{F}_T$: $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$. Поскольку $\rho_T > 0$ $\mathbf{P}$ -п.н., то меры $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ эквивалентны.

Лемма 2.1 *Процесс $\tilde{w}_t = w_t + bt$ является винеровским процессом относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$.*

Доказательство. Докажем сначала общее утверждение о замене меры в условных математических ожиданиях. Пусть $d\tilde{\mathbf{P}}/d\mathbf{P} = \rho$, тогда для с.в. ξ , такой, что $\mathbf{E}\rho|\xi| < \infty$,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}\xi = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho\xi/\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho. \quad (2.3)$$

Достаточно показать, что для любого $\mathcal{F}_t$ -измеримого множества A

$$\int_A (\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho)(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}\xi)d\mathbf{P} = \int_A \rho\xi d\mathbf{P}.$$

Выражение в правой части равно $\tilde{\mathbf{E}}1_A\xi$. Покажем, что выражение в левой части равно тому же. Действительно, в силу $\mathcal{F}_t$ -измеримости величин 1_A и $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\xi$, левая часть равна

$$\mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}(\rho\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}1_A\xi) = \mathbf{E}\rho\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}1_A\xi = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}1_A\xi = \tilde{\mathbf{E}}1_A\xi.$$

Таким образом, (2.3) доказано. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}\left(\frac{\tilde{w}_t - \tilde{w}_s}{\sqrt{t-s}} < x\right) = \Phi(x).$$

Обозначим для краткости событие в левой части через A и заметим, что $A \in \mathcal{F}_t$, тогда согласно (2.3)

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}(A) = \frac{1}{\rho_s}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}\rho_T 1_A = \frac{1}{\rho_s}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}1_A\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho_T$$

Поскольку ρ_t является мартингалом относительно $\mathbf{P}$, то $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho_T = \rho_t$, следовательно,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}(A) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}e^{-b(w_t - w_s) - 0.5b^2(t-s)}1_{\left\{\frac{w_t - w_s + b(t-s)}{\sqrt{t-s}} < x\right\}}.$$

Воспользуемся теперь тем, что приращение $w_t - w_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$ и $w_t - w_s \in N(0, t - s)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} e^{-by-0.5b^2(t-s)} 1_{\left\{\frac{y+b(t-s)}{\sqrt{t-s}} < x\right\}} dy \\ &= \int_{\frac{y+b(t-s)}{\sqrt{t-s}} < x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y+b(t-s))^2}{2(t-s)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Возвращаясь к модели (2.2), обозначим через $\tilde{\mathbf{P}}$ меру, относительно которой процесс $\tilde{w}_t = w_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ - винеровский. Процесс цен S_t представляется через процесс $\tilde{w}_t$ в виде:

$$S_t = S_0 \exp(\sigma \tilde{w}_t - 0.5\sigma^2 t + rt),$$

или в дифференциальной форме

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma d\tilde{w}_t.$$

Дисконтированный процесс цен имеет вид

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 \exp(\sigma \tilde{w}_t - 0.5\sigma^2 t).$$

Применяя к нему те же рассуждения, что и к процессу ρ_t , мы видим, что $\tilde{S}_t$ является мартингалом относительно $\tilde{\mathbf{P}}$.

Для дисконтированной цены $\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$, используя формулу Ито, получим $d\tilde{X}_t = \gamma_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{w}_t = \gamma_t d\tilde{S}_t$.

2.2 Опцион европейского вида

Рассмотрим опцион с датой исполнения T и платежной функцией f . Для определения справедливой цены опциона, воспользуемся следующей теоремой ([5], с. 197):

Теорема 2.1 Пусть w_t - винеровский процесс, $\mathcal{F}_t$ - σ -алгебры, порожденные величинами $\{w_s\}_{s \leq t}$, и дана с.в. $\xi \in \mathcal{F}_T$, $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, тогда существует процесс α_t , такой что $\int_0^T \alpha_t^2 dt < \infty$ п.н. и

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\xi + \int_0^t \alpha_u dw_u.$$

Если $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, то $\int_0^T \mathbf{E}\alpha_t^2 dt < \infty$.

Согласно этой теореме процесс $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{f}|\mathcal{F}_t)$ может быть представлен в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{f}|\mathcal{F}_t) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f} + \int_0^t \alpha_u d\tilde{w}_u.$$

Определим стратегию $\pi^* = \left(\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}, \left\{ \frac{\alpha_u}{\sigma \tilde{S}_u} \right\} \right)$, тогда

$$\tilde{X}_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \int_0^t \gamma_u d\tilde{S}_u = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f} + \int_0^t \alpha_u d\tilde{w}_u = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{f}|\mathcal{F}_t). \quad (2.4)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{X}_T^{\pi^*} = \tilde{f}$. Таким образом, рынок является полным в том смысле, что для любой платежной функции f , удовлетворяющей условию $\mathbf{E}f < \infty$, можно определить стратегию π , такую что $X_T^\pi = f$. Как и в пункте 1.5.1, мы можем определить множество хеджей условием $\Pi = \{\pi : X_T^\pi \geq f\}$, а цену как $\mathcal{C} = \inf\{X_0^\pi : \pi \in \Pi\}$. Те же рассуждения, что и в дискретном случае, доказывают, что $\mathcal{C} = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

2.2.1 Стандартные опционы

Применим последнюю формулу для вычисления цены стандартных опционов. Рассмотрим опцион покупки $f = (S_T - K)^+$. Его цена равна

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f} = e^{-rT}\tilde{\mathbf{E}}(S_0e^{\sigma\tilde{w}_T+rT-0.5\sigma^2T} - K)^+ \\
 &= e^{-rT} \int_{\frac{\ln \frac{K}{S_0} - rT + 0.5\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} (S_0e^{\sigma\sqrt{T}y+rT-0.5\sigma^2T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= S_0 \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT - 0.5\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+\sigma\sqrt{T})^2}{2}} dy - e^{-rT} K \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT - 0.5\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.
 \end{aligned}$$

Произведя замену в первом интеграле и введя обозначения

$$y_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT \pm 0.5\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (2.5)$$

получим известную формулу Блэка-Шоулса:

$$\mathcal{C} = S_0\Phi(y_+) - e^{-rT}K\Phi(y_-). \quad (2.6)$$

Используя соотношение (1.18), получим формулу цены опциона продажи:

$$\mathcal{P} = e^{-rt}K\Phi(-y_-) - S_0\Phi(-y_+). \quad (2.7)$$

Одно из примечательных следствий этих формул состоит в том, что цена опционов не зависит от ожидаемой доходности μ .

Цену опциона можно рассматривать как функцию от различных параметров $\mathcal{C} = \mathcal{C}(T, S_0, \sigma, \dots)$. Важное значение для практики имеют показатели риска («Greek letters») - производные цены опциона (портфеля опционов) по различным параметрам. Они показывают, насколько изменится цена при изменении того или иного параметра. Эти производные имеют специальное обозначение: $\Delta = \partial\mathcal{C}/\partial S_0$, $\Gamma = \partial^2\mathcal{C}/\partial S_0^2$,

$\Theta = -\partial\mathcal{C}/\partial T$, $\mathcal{V} = \partial\mathcal{C}/\partial\sigma$ («вега»), и др. Приведем их значения для опциона покупки:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Phi(y_+), \quad \Gamma = \frac{\varphi(y_+)}{S_0\sigma\sqrt{T}}, \quad \mathcal{V} = S_0\sqrt{T}\varphi(y_+), \\ \Theta &= -\frac{S_0\varphi(y_+)\sigma}{2\sqrt{T}} - re^{-rT}K\Phi(y_-).\end{aligned}$$

При изменении цены акции на dS_0 цена опциона изменится на величину $\Delta \cdot dS_0 + 0.5\Gamma(dS_0)^2$. Если в портфеле имеется один опцион и $-\Delta$ акций, то цена портфеля изменится на величину $0.5\Gamma(dS_0)^2$. Поскольку $\Gamma > 0$, то мы получаем интересный результат - цена портфеля увеличивается при любом изменении цен; этот факт является основой реальных торговых стратегий.

Используя приведенные формулы для производных, можно убедиться, что $\mathcal{C}$, как функция первых двух переменных $\mathcal{C}(T, S)$, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\mathcal{C}(T, S)}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2\mathcal{C}(T, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial\mathcal{C}(T, S)}{\partial S} - r\mathcal{C}(T, S) \quad (2.8)$$

и начальному условию $\mathcal{C}(0, S) = (S - K)^+$. Цена опциона продажи удовлетворяет этому же уравнению при начальном условии, равном соответствующей платежной функции $f(S) = (K - S)^+$.

Теорема 2.2 *Хеджирующая стратегия для стандартных опционов имеет вид $\gamma_t = \Delta(T - t, S_t)$.*

Найдем сначала выражение для $\tilde{X}_t^{\pi^*}$. Воспользовавшись тем, что S_t - это однородный марковский процесс, получим

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t^{\pi^*} &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} \tilde{f} = \tilde{\mathbf{E}}_{S_t, t} e^{-rT} f(S_T) = e^{-rt} \tilde{\mathbf{E}}_{S_t} e^{-r(T-t)} f(S_{T-t}) \\ &= e^{-rt} \mathcal{C}(T - t, S_t).\end{aligned}$$

Применим формулу Ито по отношению к процессу $\tilde{X}_t^{\pi^*}$:

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t^{\pi^*} &= e^{-rt} \left[-\frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t)}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}(T-t, S_t)}{\partial S^2} \right. \\ &\quad \left. + r S_t \frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t)}{\partial S} - r \mathcal{C}(T-t, S_t) \right] dt + e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t)}{\partial S} \sigma S_t d\tilde{w}_t. \end{aligned}$$

Выражение при dt в силу (2.8) равно нулю, поэтому

$$d\tilde{X}_t^{\pi^*} = \Delta(T-t, S_t) \sigma \tilde{S}_t d\tilde{w}_t.$$

С другой стороны, $d\tilde{X}_t^{\pi^*} = \gamma_t d\tilde{S}_t = \gamma_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{w}_t$. Поскольку процесс Ито однозначно определяет свои коэффициенты, то $\gamma_t = \Delta(T-t, S_t)$ п.н.

2.2.2 Опционы с последствием

Рассмотрим опцион продажи с последствием (look-back put option), согласно которому обладатель опциона имеет право продать акции по максимальной за промежуток $[0, T]$ цене. Платежная функция данного опциона равна

$$f = \max_{t \leq T} S_t - S_T.$$

Рассмотрим процесс $\bar{w}_t = \tilde{w}_t + \lambda t$, где $\lambda = (r - 0.5\sigma^2)/\sigma$, тогда процесс цен имеет вид $S_t = S_0 e^{\sigma \bar{w}_t}$, причем

$$\max_{t \leq T} S_t = S_0 e^{\sigma \bar{M}_T}, \quad \bar{M}_T = \max_{t \leq T} \bar{w}_t.$$

Согласно лемме 2.1 процесс $\bar{w}_t$ является винеровским относительно меры $d\bar{\mathbf{P}} = \bar{\rho}_T d\tilde{\mathbf{P}}$, где

$$\bar{\rho}_T = e^{-\lambda \tilde{w}_T - 0.5\lambda^2 T} = e^{-\lambda \bar{w}_T + 0.5\lambda^2 T}.$$

Цена опциона может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f) &= \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f} = \tilde{\mathbf{E}} \rho_T (\rho_T)^{-1} e^{-rT} (S_0 e^{\sigma \bar{M}_T} - S_0 e^{\sigma \bar{w}_T}) \\ &= S_0 e^{-rT} \tilde{\mathbf{E}} e^{\lambda \bar{w}_T - 0.5\lambda^2 T} (e^{\sigma \bar{M}_T} - e^{\sigma \bar{w}_T}). \end{aligned}$$

Совместная плотность распределения винеровского процесса и его максимума в момент времени t имеет вид

$$p(x, y) = 1_{\{y > x^+\}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{t^{3/2}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}, \quad (2.9)$$

где $x^+ = \max(0, x)$. Покажем это. Пусть y - точка на прямой, τ_y - момент достижения винеровским процессом w_t точки y . Рассмотрим отраженный процесс

$$w_t^y = \begin{cases} w_t, & \tau_y > t, \\ 2y - w_t, & \tau_y \leq t. \end{cases}$$

Доказывается [20], что w_t^y - также винеровский процесс; поэтому

$$F(x, y) = \mathbf{P}(w_t < x, M_t < y) = \mathbf{P}(w_t < x) - \mathbf{P}(w_t^y < x, M_t^y \geq y) = P_1 - P_2.$$

Пусть $y > x^+$, тогда

$$P_2 = \mathbf{P}(2y - w_t < x, M_t^y \geq y) = \mathbf{P}(w_t > 2y - x) = 1 - \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right).$$

Заметим, что при $y < 0$ функция $F(x, y) = 0$, а при $0 < y < x$ функция $F(x, y)$ не зависит от x . Дифференцируя $F(x, y)$ по x и по y , получаем выражение (2.9) для плотности.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f) &= S_0 e^{-rT} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^y dx e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 T} (e^{\sigma y} - e^{\sigma x}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{T^{3/2}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2T}} \\ &= S_0 \left[\frac{\nu\sigma}{r} \Phi(\nu\sqrt{T}) + \frac{\lambda\sigma}{r} e^{-rT} \Phi(-\lambda\sqrt{T}) - 1 \right], \end{aligned}$$

где $\nu = (r + 0.5\sigma^2)/\sigma$.

2.2.3 Барьерные опционы

Существуют различные типы барьерных опционов. Во-первых, это могут быть опционы покупки/продажи (call/put); во вторых, опционы различаются по признаку, находится ли барьер выше/ниже (up/down) начальной цены; в третьих, будет ли он исполнен/не исполнен (in/out) при достижении барьера. Приведем пример барьерного опциона «up-and-out call»: обладатель опциона имеет право купить в момент времени T некоторый актив по цене K , если до этого момента цена опциона не превысит уровня H . Платежная функция этого опциона имеет вид

$$f = 1_{\left\{\max_{t \leq T} S_t < H\right\}} (S_T - K)^+.$$

Заметим, что платежная функция отлична от нуля только в том случае, если $H > S_0$ и $H > K$. Кроме того, она не превосходит платежной функции соответствующего стандартного опциона, следовательно, и цена барьерных опционов меньше цены стандартных опционов, чем и объясняется их популярность.

Чтобы упростить вычисления, представим платежную функцию в виде

$$\begin{aligned} f &= (S_T - K)^+ - 1_{\{H < S_T\}} (S_T - K) - 1_{\{K < S_T < H < \max_{t \leq T} S_t\}} (S_T - K) \\ &= f_1 - f_2 - f_3. \end{aligned}$$

Математическое ожидание $\tilde{f}_1$ выражается формулой (2.6); рассматривая $y_{\pm}$ в формуле (2.5) как функцию от K , мат. ожидание $\tilde{f}_2$ можно получить в виде

$$S_0 \Phi(y_+(H)) - e^{-rT} K \Phi(y_-(H)).$$

Для того чтобы вычислить ожидание $\tilde{f}_3$, произведем такую же замену

меры, как и для опционов с последствием:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{E}}\widetilde{f}_3 &= e^{-rT} \widetilde{\mathbf{E}} e^{\lambda \bar{w}_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T} 1_{\{K < S_0 e^{\sigma \bar{w}_T} < H < S_0 e^{\sigma \bar{M}_T}\}} (S_0 e^{\sigma \bar{w}_T} - K) \\
&= e^{-rT} \int_{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{K}{S_0}}^{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{H}{S_0}} dx e^{\lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 T} (S_0 e^{\sigma x} - K) \int_{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{H}{S_0}}^{\infty} dy \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{T^{3/2}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2T}} \\
&= S_0 \left(\frac{H}{S_0} \right)^{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} [\Phi(z_+) - \Phi(u_+)] - K e^{-rT} \left(\frac{H}{S_0} \right)^{-1 + \frac{2r}{\sigma^2}} [\Phi(z_-) - \Phi(u_-)],
\end{aligned}$$

где

$$z_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0}{H} - (r \pm 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad u_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0 K}{H^2} - (r \pm 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

2.3 Опцион американского типа

Как мы видели, в модели геометрического броуновского движения цены многих опционов европейского типа вычисляются аналитически. Но для опциона американского типа, точных формул для цены нет. Уже отмечалось, что в случае одномерного базового актива можно построить одномерную регулярную сетку, аппроксимирующую траектории S_t , и вычислять цену по формулам (1.25). Если же платежная функция зависит от нескольких базовых активов, то можно применить либо общий метод стохастической сетки Бродаи-Глассермана (п.1.6.3), либо специфический для данной модели метод «стохастического интегрирования по частям» Балли и др. [12], который будет изложен в п.2.3.2. Рассматриваемые ниже вычислительные схемы формулируются для простоты изложения для одномерного случая, но обобщение на многомерный случай не вызывает затруднений.

Мы будем рассматривать рынок в дискретные моменты времени $t_n = n\Delta t$, где $\Delta t = T/N$. Последовательность S_n может быть представлена в виде $S_n = S_{n-1} \exp(\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_n + \lambda\Delta t)$, где ε_n — независимые

стандартные нормальные величины. Далее вместо последовательности S_n будет удобнее рассматривать последовательность $\xi_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$. При этом переходные плотности равны $p(u, v) = \exp(-0.5(u - v)^2)/\sqrt{2\pi}$, а платежные функции имеют вид $f_n(S_0 e^{\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_n + \lambda t_n})$.

2.3.1 Метод стохастической сетки

В этом параграфе мы проверим выполняются ли условия теоремы 1.8 для модели Блэка-Шоулса. Вместо случайных величин $x_{n,i}$ рассмотрим величины $\xi_{n,i}$, которые связаны преобразованием

$$x_{n,i} = S_0 \exp(\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_{n,i} + \lambda t_n). \quad (2.10)$$

Оценка с усредненной плотностью. Рассмотрим оценку с переходной плотностью

$$r_{n,i}(\bar{\xi}_{n-1}, v) = \frac{1}{M} \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(\xi_{n-1,j} - v)^2}.$$

Для состоятельности оценки, согласно неравенству (1.36), достаточно показать конечность интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dv \tilde{Y}_n^2(y(v)) \mathbf{E} \frac{\sum_j p^2(\xi_{n-1,j}, v)}{\sum_j p(\xi_{n-1,j}, v)} = \\ & = \int_0^\infty dv \tilde{Y}_n^2(y(v)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{n-1,j} - v)^2)}{\sum_j \exp(-(\xi_{n-1,j} - v)^2/2)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $y(v) = S_0 e^{v\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda t_n}$. Оценим математическое ожидание под знаком интеграла в (2.11).

Лемма 2.2 Пусть η_i , $i = 1, \dots, M$, - неотрицательные, независимые, одинаково распределенные величины, $\zeta_i = \eta_i^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\bar{\eta} = \frac{1}{M} \sum_j \eta_j$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{M} \sum_j \zeta_j$, тогда

$$\mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} \leq 3 \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\eta}.$$

Доказательство. Из равенства

$$\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} = \frac{\bar{\zeta}}{\mathbf{E}\eta} - \frac{1}{\mathbf{E}\eta} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} (\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta), \quad (2.12)$$

следует оценка

$$\mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} \leq \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\eta} + \frac{1}{\mathbf{E}\eta} \mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta|. \quad (2.13)$$

Из неравенства $\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon} \leq (\sum_j \eta_j)^{1+\varepsilon}$ следует, что

$$\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} = \frac{\left(\sum_j \zeta_j\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{\sum_j \eta_j} \left(\sum_j \zeta_j\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \leq \left(\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \quad (2.14)$$

Используя последнюю оценку, а затем неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta| &\leq \mathbf{E} \left(\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta| \\ &\leq \mathbf{E}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon} \right) \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta|^{1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Далее воспользуемся следующей теоремой ([21], с.79):

Теорема 2.3 Пусть $X_1, \dots, X_n$ - независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными абсолютными моментами порядка p ($1 \leq p \leq 2$). Тогда

$$\mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^n X_k \right|^p \leq \left(2 - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \mathbf{E} |X_k|^p.$$

Используя эту теорему, можем оценить (2.15) величиной

$$M^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \mathbf{E}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \eta^{1+\varepsilon} \frac{2}{M^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \eta^{1+\varepsilon} = 2\mathbf{E}\zeta.$$

Подставляя полученные оценки в (2.13), получаем утверждение леммы.

Применяя лемму (с $\varepsilon = 1$) к математическому ожиданию в (2.11), получаем, что

$$\mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{n-1,j} - v)^2)}{\sum_j \exp(-(\xi_{n-1,j} - v)^2/2)} \leq 3 \mathbf{E} \frac{\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-2}} \exp(-(\xi_{n-1,1} - v)^2)}{\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-2}} \exp(-(\xi_{n-1,1} - v)^2/2)}. \quad (2.16)$$

Вычислим математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} \exp(-(\xi_{n,1} - v)^2/m)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} e^{-\frac{(\xi_{n,1}-v)^2}{m}} &= \frac{\sqrt{\pi m}}{M} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(m/2)}} e^{-\frac{(z-v)^2}{2(m/2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\xi_{n-1,j})^2}{2}} dz \\ &= \frac{\sqrt{\pi m}}{M} \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi(m/2+1)}} e^{-\frac{(\xi_{n-1,j}-v)^2}{2(m/2+1)}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{m+2}} \frac{1}{M} \sum_j \exp(-((\xi_{n-1,j} - v)^2)/(m+2)). \end{aligned}$$

Применяя полученную формулу, можем переписать правую часть (2.16) в виде

$$3\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{n-2,j} - v)^2/3)}{\sum_j \exp(-(\xi_{n-2,j} - v)^2/4)}.$$

К полученному выражению опять можно применить лемму (при $\varepsilon = 1/3$) и т.д. В результате получаем, что

$$\mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{n-1,j} - v)^2)}{\sum_j \exp(-(\xi_{n-1,j} - v)^2/2)} \leq C_n \frac{\exp(-v^2/(2n-1))}{\exp(-v^2/2n)} = C_n e^{-\frac{v^2}{2n(2n-1)}}.$$

Пусть опцион таков, что для $\tilde{Y}_k(x)$ выполнена оценка $\tilde{Y}_k(x) \leq C(x^m + 1)$, тогда интеграл (2.11) оценивается сверху величиной

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{Cv} e^{-\frac{v^2}{2k(2k-1)}} dv < \infty.$$

Таким образом, оценка опциона по усредненной плотности является состоятельной. Отметим, что последнему условию удовлетворяют стандартные опционы.

Оценка по независимым траекториям. В этом случае переходная плотность имеет вид $r_{n,i}(\bar{x}_{n-1}, y) = p(x_{n-1,i}, y)$ и, следовательно, $\rho_1 \equiv 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\check{Y}_0^2(S_0) &\geq \mathbf{E}[\rho_2(j_1, j_2)f(x_{2,j_2})]^2 \geq \frac{1}{M^2}\mathbf{E}[\rho_2(1, 2)f(x_{2,2})]^2 = \\ &= \frac{1}{M^2} \int_{R^3} \frac{p^2(x_{1,1}, x_{2,2})}{p(x_{1,2}, x_{2,2})} f(x_{2,2}) p(S_0, x_{1,1}) p(S_0, x_{1,2}) dx_{1,1} dx_{1,2} dx_{2,2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Переходя от переменных $x_{n,i}$ к переменным $\xi_{n,i}$ (см.(2.10)), получим под знаком интеграла экспоненту с показателем

$$\begin{aligned} &-(\xi_{1,1} - \xi_{2,2})^2 + \frac{1}{2}(\xi_{1,2} - \xi_{2,2})^2 - \frac{1}{2}\xi_{1,1}^2 - \frac{1}{2}\xi_{1,2}^2 = \\ &= -\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\xi_{1,1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_{2,2}\right)^2 - 2\xi_{1,2}^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\xi_{2,2} - \sqrt{\frac{6}{4}}\xi_{1,2}\right)^2. \end{aligned}$$

Если существуют $\varepsilon > 0$ и K , такие, что $f(x) > \varepsilon$ при $x > K$ или при $x < 1/K$, то интеграл в (2.17) расходится и, следовательно, дисперсия оценки бесконечна.

2.3.2 Метод стохастического интегрирования по частям

Следуя [13], введем определение стохастического интегрирования по частям. Пусть даны две случайные величины F, G ; будем говорить, что для этих величин верна формула интегрирования по частям, если существует случайная величина $H(F; G)$, такая что

$$\mathbf{E}\varphi'(F)G = \mathbf{E}\varphi(F)H(F; G) \quad (2.18)$$

для любой гладкой функции φ , у которой производная принадлежит $L_1(R)$. Множество таких функций будем обозначать C_1^1 .

Сформулируем лемму, позволяющую вычислять условные математические ожидания.

Лемма 2.3 Пусть F и G - две случайные величины с плотностями $p_F(x)$ и $p_G(x)$, а также совместной плотностью $p_{FG}(x, y)$, для которых существуют $H(F; 1)$ и $H(F; G)$, тогда

$$\mathbf{E}(G \mid F = x) = \frac{\mathbf{E}\theta(F - x)H(F; G)}{\mathbf{E}\theta(F - x)H(F; 1)}, \quad (2.19)$$

где $\theta(x) = 0$, при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$.

Доказательство. Пусть последовательность непрерывных функций ω_n из $L_1(R)$ сходится к δ -функции, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G \mid F = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{p_{FG}(x, y)}{p_F(x)} dy = \lim_n \frac{\int y \omega_n(z - x) p_{FG}(z, y) dy dz}{\int \omega_n(z - x) p_F(z) dz} \\ &= \lim_n \frac{\mathbf{E}G \omega_n(F - x)}{\mathbf{E} \omega_n(F - x)}. \end{aligned}$$

Введем функции $\theta_n(x) = \int_{-\infty}^x \omega_n(y) dy$, тогда $\theta'_n(x) = \omega_n(x)$ и $\theta_n(x)$ стремится к $\theta(x)$ п.в. Применяя интегрирование по частям и переходя к пределу, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G \mid F = x) &= \lim_n \frac{\mathbf{E}\theta'_n(F - x)G}{\mathbf{E}\theta'_n(F - x)} \\ &= \lim_n \frac{\mathbf{E}\theta_n(F - x)H(F; G)}{\mathbf{E}\theta_n(F - x)H(F; 1)} = \frac{\mathbf{E}\theta(F - x)H(F; G)}{\mathbf{E}\theta(F - x)H(F; 1)}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к нашей модели, предположим, что $g(x) \leq C(x^m + 1)$ и проверим, что существует $H(S_u; g(S_t))$. Плотность совместного распределения случайных величин S_u и S_t равна

$$p_{u,t}(x, y) = p_u(x)p(u, x; t, y) \quad (2.20)$$

и $\int_0^\infty dy p(u, x; t, y) g(y) \leq C(x^m + 1)$. Пусть $\varphi \in C_1^1$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\varphi'(S_u)g(S_t) &= \int_0^\infty dx \varphi'(x)p_u(x) \int_0^\infty dy p(u, x; t, y)g(y) \\ &= - \int_0^\infty dx \varphi(x) \int_0^\infty dy g(y) \frac{\partial}{\partial x} p_{u,t}(x, y) \\ &= -\mathbf{E}\varphi(S_u)g(S_t) \frac{\partial}{\partial x} \ln p_{u,t}(S_u, S_t). \end{aligned}$$

Положим

$$\pi_{u,t}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln p_{u,t}(x, y). \quad (2.21)$$

и вычислим $\pi_{u,t} = \pi_{u,t}(S_u, S_t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln p_u(x) &= -\frac{\ln(x/S_0) - \lambda u}{\sigma^2 u x} - \frac{1}{x}, \\ \frac{d}{dx} \ln p(u, x; t, y) &= \frac{\ln(y/x) - \lambda(t-u)}{\sigma^2(t-u)x}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \ln p_{u,t}(S_u, S_t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \ln p_u(S_u) - \frac{\partial}{\partial x} \ln p(u, S_u; t, S_t) = \\ &= \frac{\sigma w_u}{\sigma^2 u S_u} + \frac{1}{S_u} - \frac{\sigma(w_t - w_u)}{S_u \sigma^2(t-u)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\pi_{u,t} = \frac{(t-u)(\sigma u + w_u) - u(w_t - w_u)}{u(t-u)\sigma S_u}. \quad (2.22)$$

и

$$\mathbf{E}\varphi'(S_u)g(S_t) = \mathbf{E}\varphi(S_u)g(S_t)\pi_{u,t}. \quad (2.23)$$

Предположим, что $g(x) \leq C(x^m + 1)$, тогда $\mathbf{E}|g(S_t)\pi_{u,t}| < \infty$ и если взять $\varphi \equiv 1$, то из (2.23) следует, что

$$\mathbf{E}g(S_t)\pi_{u,t} = 0. \quad (2.24)$$

Если в формулу (2.23) подставить $g(x) \equiv 1$, то мы получим, что выполняется интегрирование по частям в виде

$$\mathbf{E}\varphi'(S_u) = \mathbf{E}\varphi(S_u)\pi_{u,t}.$$

Таким образом, условное математическое ожидание можно вычислять, используя одинаковые веса для числителя и знаменателя, то есть

$$\mathbf{E}(g(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbf{E}g(S_t)\theta(S_u - x)\pi_{u,t}}{\mathbf{E}\theta(S_u - x)\pi_{u,t}}. \quad (2.25)$$

Сформулируем теперь схему вычисления цены американского опциона, использующий формулу (2.25). Моделируем M независимых траекторий S^i и полагаем $\check{Y}_N(i) = \tilde{f}_N(S_{t_N}^i)$, а для $n < N$

$$\check{Y}_n(i) = \max \left(\tilde{f}_n(S_{t_n}^i), \frac{\sum_j \check{Y}_{n+1}(j) \theta(S_{t_n}^j - S_{t_n}^i) \pi_{t_n, t_{n+1}}(S_{t_n}^j, S_{t_{n+1}}^j)}{\sum_j \theta(S_{t_n}^j - S_{t_n}^i) \pi_{t_n, t_{n+1}}(S_{t_n}^j, S_{t_{n+1}}^j)} \right). \quad (2.26)$$

Заметим, что в отличие от схемы Броуди-Глассермана, оценка условного математического ожидания здесь является, вообще говоря, смещенной. Как показывают вычисления, дисперсия в данной схеме может быть достаточно большой, поэтому рассмотрим некоторые способы уменьшения дисперсии.

Функции локализации. Пусть $\Psi(x)$ – функция распределения, у которой имеется плотность $\psi = \Psi'$. Используя (2.23), получаем

$$\mathbf{E}\psi(S_u - x)g(S_t) = \mathbf{E}g(S_t)\Psi(S_u - x)\pi_{u,t}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}g(S_t)\theta(S_u - x)\pi_{u,t} = \mathbf{E}g(S_t)[\psi(S_u - x) + (\theta - \Psi)(S_u - x)\pi_{u,t}],$$

Таким образом, для нахождения условного математического ожидания можно воспользоваться формулой

$$\mathbf{E}(g(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbf{E}(g(S_t)[\psi(S_u - x) + (\theta - \Psi)(S_u - x)\pi_{u,t}])}{\mathbf{E}[\psi(S_u - x) + (\theta - \Psi)(S_u - x)\pi_{u,t}]}. \quad (2.27)$$

Подберем ψ таким образом, чтобы минимизировать величину

$$I(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}g^2(S_t)[\psi(S_u - \alpha) + (\theta - \Psi)(S_u - \alpha)\pi_{u,t}]^2 d\alpha \quad (2.28)$$

$$= \mathbf{E}g^2(S_t) \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}]^2 d\beta. \quad (2.29)$$

Заметим, что

$$I(\psi) \leq 2\mathbf{E}g^2(S_t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\beta) d\beta + 2\mathbf{E}g^2(S_t)\pi_{u,t}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \Psi)^2(\beta) d\beta.$$

Таким образом, для конечности функционала достаточно чтобы функции ψ и $\theta - \Psi$ принадлежали $L_2(\mathbf{R})$. Дополнительно потребуем, чтобы $\psi \in C^1$. Множество функций ψ , удовлетворяющих всем перечисленным условиям, обозначим $\mathcal{L}$.

Теорема 2.4 $\inf_{\psi \in \mathcal{L}} I(\psi)$ достигается при $\psi(x) = \frac{\mu}{2}e^{-\mu|x|}$, где μ равно

$$\mu = \left(\frac{\mathbf{E}g^2(S_t)\pi_{u,t}^2}{\mathbf{E}g^2(S_t)} \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию функционала $I(\psi)$ в направлении функции $h \in C^1(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\psi + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = 2\mathbf{E}g^2(S_t) \int_{-\infty}^{\infty} [h(\beta) - H(\beta)\pi_{u,t}][\psi(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}] d\beta,$$

где $H(x) = \int_{-\infty}^x h(\beta) d\beta$. Учитывая (2.24), последнее выражение можно переписать в виде

$$2\mathbf{E}g^2(S_t) \int_{-\infty}^{\infty} [h(\beta)\psi(\beta) - H(\beta)(\theta - \Psi)(\beta)(\pi_{u,t})^2] d\beta.$$

Применим формулу интегрирования по частям в первом слагаемом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\psi(\beta) d\beta = H(\beta)\psi(\beta) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(\beta)\psi'(\beta) d\beta.$$

Поскольку $\psi(\pm\infty) = 0$, то получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\psi + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta H(\beta) \mathbf{E}g^2(X_t) [\psi'(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}^2].$$

Для того чтобы вариация обращалась в 0 для почти любой интегрируемой функции h , необходимо и достаточно чтобы

$$\mathbf{E}g^2(X_t) [\psi'(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}^2] = 0$$

для почти всех β . Таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\Psi''(\beta) - \mu^2 \Psi(\beta) + \mu^2 \theta(\beta) = 0, \quad (2.31)$$

где μ определяется (2.30).

При $\beta < 0$ уравнение (2.31) преобразуется к виду $\Psi''(\beta) - \mu^2 \Psi(\beta) = 0$. Общее решение такого уравнения имеет форму

$$\Psi(\beta) = c_1 e^{\mu\beta} + c_2 e^{-\mu\beta}.$$

С учетом того, что $\psi(-\infty) = 0$, получаем, что $c_2 = 0$. При $\beta > 0$ уравнение (2.31) приобретает вид

$$\Psi''(\beta) - \mu^2 \Psi(\beta) + \mu^2 = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\Psi(\beta) = c_3 e^{\mu\beta} + c_4 e^{-\mu\beta} + 1$. Опять, с учетом того что, $\psi(\infty) = 0$, получаем $c_3 = 0$. Из условий непрерывности в нуле функций Ψ и ψ

$$\begin{cases} c_1 &= c_4 + 1, \\ c_1 &= -c_4, \end{cases}$$

откуда $c_4 = -1/2$, $c_1 = 1/2$.

Вторая производная от I всегда неотрицательна:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} I(\psi + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(X_t) \mathbf{E}[h(\beta) - H(\beta)\pi_{u,t}]^2 d\beta \geq 0;$$

и, следовательно, функция ψ^* задает минимум функционала I .

Аналитическое интегрирование. В данном случае модификация схемы (2.26) состоит в том, что математические ожидания в формуле (2.25) представляется в виде

$$\mathbf{E}g(S_t)\theta(S_u - x)\pi_{u,t} = \mathbf{E}g(S_t)q_{u,t}(x, S_t),$$

где

$$q_{u,t}(x, y) = \mathbf{E}(\theta(S_u - x)\pi_{u,t} \mid S_t = y). \quad (2.32)$$

Согласно формуле (2.21), $\pi_{u,t}(z, y) = -\partial \ln p_{u,t}(z, y) / \partial z$. Подставляя это выражение в (2.32), получим

$$q_{u,t}(x, y) = -\frac{1}{p_t(y)} \int_x^{\infty} dz \frac{\partial p_{u,t}(z, y)}{\partial z} = p_{u,t}(x, y) / p_t(y).$$

Формула (2.25) для вычисления условного математического ожидания в данном случае принимает вид

$$\mathbf{E}(g(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbf{E}q_{u,t}(x, S_t) g(S_t)}{\mathbf{E}q_{u,t}(x, S_t)}, \quad (2.33)$$

а формула (2.26) для вычисления цены опциона:

$$\check{Y}_n(i) = \max \left(\tilde{f}_n(S_{t_n}^i), \frac{\sum_j q_{t_n, t_{n+1}}(S_{t_n}^i, S_{t_{n+1}}^j) \check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j q_{t_n, t_{n+1}}(S_{t_n}^i, S_{t_{n+1}}^j)} \right). \quad (2.34)$$

Замечание. Если положить

$$\rho_{u,t}(x, y) = q_{u,t}(x, y) / \mathbf{E} q_{u,t}(x, S_t) = p(x, y) / p_t(y),$$

то можно преобразовать формулы (2.33), (2.34) к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(S_t) | S_u = x) &= \mathbf{E} \rho_{u,t}(x, S_t) g(S_t), \\ \check{Y}_n(i) &= \max \left(\tilde{f}_n(S_{t_n}^i), \frac{1}{M} \sum_j \rho_{n+1}(i, j) \check{Y}_{n+1}(j) \right). \end{aligned}$$

Однако, как нетрудно видеть, получившаяся оценка - это «оценка по независимым траекториям» в методе стохастической сетки, а она имеет бесконечную дисперсию.

Глава 3

Диффузионные модели

3.1 Модели акций

Модель геометрического броуновского движения является удобной для анализа, но она не описывает некоторых особенностей реального рынка. Одна из таких особенностей состоит в поведении так называемой «предполагаемой волатильности» (implied volatility). Рассмотрим этот эффект; предположим, что $\tilde{C}(T, K)$ - это наблюдаемая на рынке цена опциона покупки с датой исполнения T и ценой исполнения K . Подставим это значение в левую часть формулы (2.6) и рассмотрим полученное выражение как уравнение для неизвестного параметра σ . Пусть $\tilde{\sigma}(T, K)$ - решение рассматриваемого уравнения; именно оно и называется предполагаемой волатильностью. Если модель геометрического броуновского движения верна, то для различных параметров T, K мы должны получать одинаковые значения $\tilde{\sigma}(T, K)$. В действительности этого не происходит - значения $\tilde{\sigma}(T, K)$ могут значительно различаться при различных значениях параметров.

3.1.1 Модель локальных волатильностей

Объяснить этот эффект можно с помощью различных моделей, одна из которых – это модель локальных волатильностей. В этой модели

динамика цен акций описывается диффузионным процессом вида

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(t, S_t)dw_t + \mu(t, S_t)dt. \quad (3.1)$$

Функция $\sigma(t, x)$ и называется «локальными волатильностями».

Первый вопрос, который возникает в связи с этим уравнением, это вопрос о существовании решения. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в несколько более общем виде:

$$d\xi_t = a(t, \xi_t)dw_t + b(t, \xi_t)dt. \quad (3.2)$$

Известно (напр., [22], [26]), что данное уравнение имеет единственное решение при выполнении условий

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| &\leq C|x - y|, \\ |a(t, x)| + |b(t, x)| &\leq C(1 + |x|). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда следует существование и единственность решения для уравнения (3.1), если коэффициенты $\sigma(t, x)$ и $\mu(t, x)$ ограничены и выполнено неравенство

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq C \frac{|x - y|}{1 + \min(|x|, |y|)}.$$

Вывод общей формулы для цены опциона и хеджирующей стратегии в данной модели принципиально не отличается от того, который был произведен для модели геометрического броуновского движения. В данной модели мы можем воспользоваться теоремой [22], аналогичной лемме 2.1:

Теорема 3.1 Пусть $b(t, \omega)$ - прогрессивно-измеримый процесс, такой, что

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T b^2(t, \omega) dt \right) < \infty,$$

тогда для процесса

$$\rho_T = \exp \left(- \int_0^T b(t, \omega) dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T b^2(t, \omega) dt \right)$$

выполнено $\mathbf{E}\rho_T = 1$ и процесс $\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t b(s, \omega) ds$ является винеровским относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$: $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$.

Предполагая, что $\sigma(t, x) \geq \sigma_0 > 0$, мы можем определить ограниченную функцию $b(t, x) = (\mu(t, x) - r)/\sigma(t, x)$, а затем новую меру

$$d\tilde{\mathbf{P}} = e^{-\int_0^T b(u, S_u) dw_u - 0.5 \int_0^T b^2(u, S_u) du} d\mathbf{P}$$

и процесс $\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t b(u, S_u) du$. Уравнение (3.1) можно преобразовать через него к виду

$$dS_t/S_t = \sigma(t, S_t) d\tilde{w}_t + r dt. \quad (3.4)$$

Используя формулу Ито, легко проверить представление

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma(u, S_u) d\tilde{w}_u + \int_0^t [r - 0.5\sigma^2(u, S_u)] du \right). \quad (3.5)$$

Наряду с процессом S_t иногда рассматривается процесс $x_t = \ln S_t$; как следует из (3.5), x_t удовлетворяет уравнению

$$dx_t = \sigma(t, e^{x_t}) d\tilde{w}_t + [r - 0.5\sigma^2(t, e^{x_t})] dt. \quad (3.6)$$

Это уравнение по сравнению с (3.4) имеет то преимущество, что его коэффициенты - это ограниченные функции.

Нетрудно видеть, что дисконтированный процесс цен $\tilde{S}_t$ удовлетворяет уравнению

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = \sigma(t, e^{r t} \tilde{S}_t) d\tilde{w}_t \quad (3.7)$$

и, следовательно, является мартингалом относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$.

Также, как и в параграфе 2.2, доказывается, что цена опциона равна $C(f) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$ и, значит, не зависит от параметра μ .

3.1.2 Задача Коши

Если рассматривать $\mathcal{C}(f)$, как функцию от времени и значения базового актива, т.е. как $\mathcal{C}(t, S)$, то эта функция является решением задачи Коши

для уравнения параболического типа, аналогичного уравнению (2.8). Выведем это уравнение.

Пусть процесс ξ_t удовлетворяет уравнению (3.2), функция $u(t, x)$ такова, что выполнено (2.1), и $c(t, x)$ - ограниченная непрерывная функция. Рассмотрим процесс

$$\zeta_s = u(s, \xi_s) e^{\int_t^s c(u, \xi_u) du}, \quad t \leq s.$$

Из формулы Ито (2.1) следует, что

$$d\zeta_s = e^{\int_t^s c(u, \xi_u) du} [u'_x(s, \xi_s) a(s, \xi_s) dw_s + h(s, \xi_s) ds],$$

где обозначено

$$u'_s(s, x) + \frac{1}{2} a^2(s, x) u''_{xx}(s, x) + b(s, x) u'_x(s, x) + c(s, x) u(s, x) = h(s, x). \quad (3.8)$$

Проинтегрировав $d\zeta_s$ от t до T и взяв математическое ожидание при условии $\xi_t = x$, получим

$$\mathbf{E}_{t,x}[\zeta_T - \zeta_t] = \mathbf{E}_{t,x} \int_t^T ds h(s, \xi_s) e^{\int_t^s c(u, \xi_u) du}.$$

Учитывая, что $\mathbf{E}_{t,x}\zeta_t = u(t, x)$, имеем

$$u(t, x) = \mathbf{E}_{t,x} f(\xi_T) e^{\int_t^T c(u, \xi_u) du} - \mathbf{E}_{t,x} \int_t^T ds h(s, \xi_s) e^{\int_t^s c(u, \xi_u) du}, \quad (3.9)$$

где обозначено $f(x) = u(T, x)$.

Выражение (3.8) можно рассматривать как уравнение параболического типа для $u(t, x)$ при заданных $f(x)$ и $h(t, x)$ (задача Коши). Как уже отмечалось в связи с формулой Ито (2.1), в многомерном случае произведения в (3.9) заменяются на векторные аналоги.

Теорема 3.2 [23] *Уравнение (3.8) имеет единственное решение, принадлежащее $C^{1,2}([0, T] \times R)$, если выполнены следующие условия:*

- равномерная параболичность, т.е. $0 < \bar{a}_0 \leq a(t, x) \leq \bar{a}_1$;
- все функции, являющиеся параметрами данной задачи, непрерывны по своим аргументам; функции a , b , c , h , гельдеровы по x равномерно по t и, кроме того, функция a гельдерова по совокупности аргументов;
- выполнено неравенство $|f(x)| + |h(t, x)| \leq Ce^{kx^2}$ при $k < \bar{a}_0^2/(2T)$.

При этом решение может быть представлено в виде

$$u(t, x) = \int_R dy \Gamma(t, x, T, y) f(y) - \int_t^T ds \int_R dy \Gamma(t, x, s, y) h(s, y),$$

где функция $\Gamma(t, x, s, y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{1}{2} a^2(t, x) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + c(t, x) \Gamma. \quad (3.10)$$

Если существуют непрерывные производные b'_x и a''_{xx} , то Γ удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a^2(s, y) \Gamma] - \frac{\partial}{\partial y} [b(s, y) \Gamma] + c(s, y) \Gamma. \quad (3.11)$$

Линейный дифференциальный оператор в правой части (3.10), примененный к функции Γ , часто обозначают L , а оператор во равенстве (3.11) обозначают L^* .

Рассмотрим теперь цену опциона $\mathcal{C}(t, S)$. Предположим дополнительно, что $\sigma(t, S) \geq \bar{\sigma}_0 > 0$ и что f является липшицевой функцией от S_T , тогда для задачи Коши: $u(T, x) = f(e^x)$,

$$u'_t + 0.5\sigma^2(t, e^x)u''_{xx} + [r - 0.5\sigma^2(t, e^x)]u'_x - ru = 0, \quad (3.12)$$

выполнены условия теоремы 3.2 и, следовательно, существует единственное решение. Как следует из (3.9), $u(t, x)$ может быть выражена в виде

$$u(t, x) = \mathbf{E}_{t,x} f(e^{x_T}) e^{-r(T-t)}$$

и, значит, $u(t, x)$ это цена опциона в момент времени t и при условии $S_t = e^x$. Произведя в (3.12) замену $x = \ln S$, получаем уравнение для $\mathcal{C}(t, S) = u(t, \ln S)$:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S) S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial S^2} + r S \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial S} - r \mathcal{C} = 0.$$

3.1.3 Вычисление локальных волатильностей. Гладкие функции.

Покажем, как в данной модели можно определить локальные волатильности по известным ценам стандартных опционов. Эта задача имеет важное значение, как калибровочная задача для определения параметров модели. После того, как функция σ определена, можно вычислять цены более сложных («экзотических») опционов.

Пусть $p(t, x; T, y)$ переходные вероятности процесса S_t относительно меры $\mathbf{P}$; рассмотрим функцию $\Lambda(t, x; T, y) = e^{-r(T-t)} p(t, x; T, y)$ («Arrow-Debreu prices»). Из теоремы 3.2, в предположении достаточной гладкости $\sigma(t, x)$, следует, что $\Lambda(t, x; T, y)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y^2 \sigma^2(T, y) \Lambda] - \frac{\partial}{\partial y} [r y p] - r \Lambda = L^* \Lambda.$$

Через эту функцию цена опциона покупки с ценой исполнения K и датой исполнения T выражается в виде

$$\mathcal{C}(t, x; T, K) = \tilde{\mathbf{E}}_{x,t} \tilde{f}(S_T, K) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t, x; T, y) f(y, K) dy,$$

где $f(y, K) = (y - K)^+$. Рассматривая f как обобщенную функцию, имеем

$$\partial f / \partial y = -\partial f / \partial K = 1_{\{y > K\}}, \quad \partial^2 f / \partial y^2 = \partial^2 f / \partial K^2 = \delta(y - K). \quad (3.13)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2} = \Lambda(t, x; T, K). \quad (3.14)$$

Вычислим производную $\partial \mathcal{C} / \partial T$:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial \Lambda(t, x; T, y)}{\partial T} f(y, K) = \int_{-\infty}^{\infty} dy L^* \Lambda f - \int_{-\infty}^{\infty} dy r \Lambda f.$$

Интегрируя по частям, и предполагая, что соответствующие пределы на бесконечности равны нулю, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \sigma^2(T, y) \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dy r y \Lambda \frac{\partial f}{\partial y} - r \mathcal{C}. \quad (3.15)$$

Учитывая (3.13) и (3.14), получим, что первое слагаемое в (3.15) равно

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \sigma^2(T, y) \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \Lambda(t, x; T, K) = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}.$$

Второе слагаемое в (3.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy r y \Lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= r \int_K^{\infty} dy (y - K) \Lambda + r K \int_K^{\infty} dy \Lambda \\ &= r \mathcal{C} - r K \int_K^{\infty} dy \Lambda \frac{\partial f}{\partial K} = r \mathcal{C} - r K \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}. \end{aligned}$$

Объединяя полученные выражения, получаем уравнение для $\mathcal{C}(T, K)$:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2} - r K \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial K},$$

откуда локальные волатильности выражаются в виде

$$\sigma^2(T, K) = \frac{\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial T} + r K \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial K^2}}.$$

Данной формулой можно воспользоваться, если имеется гладкая аппроксимация цен $\mathcal{C}(T, K)$.

3.1.4 Дискретный случай.

Если размерность модели d невелика, то для вычислений часто используется фиксированная сетка (дерево). Изложим эту схему при $d = 1$.

Рассмотрим дискретизацию $t_k = k\Delta t$, $S_i = S_0 e^{ih\sqrt{\Delta t}}$, $\Delta t = T/N$. Пусть вероятности $p_t(S, \cdot)$ таковы, что переходы возможны только в близлежащие (к точке S) m узлов сетки. Если $p_k(i, j) = p_{t_{k-1}}(S_i, S_j)$ отличны от нуля только при $j = i - 1, i, i + 1$, т.е. $m = 3$, то такая схема называется тринomialным деревом; применяются схемы и с переходом в большее количество соседних узлов. Наложим на переходные вероятности следующие условия:

$$\sum_j p_t(S, S_j) S_j = S e^{r\Delta t}, \quad (3.16)$$

$$\sum_j p_t(S, S_j) S_j^2 = S^2 e^{(2r + \sigma^2(t, S))\Delta t}. \quad (3.17)$$

Нетрудно показать, что при достаточно большой величине h эта система имеет вероятностное решение.

Имея случайную последовательность $\bar{S}_k$ с переходными вероятностями $p_k(i, j)$, мы можем построить с помощью линейной аппроксимации случайную функцию $\bar{S}_t$ из $C([0, T])$, такую что $\bar{S}_{t_k} = \bar{S}_k$. Тем самым, на пространстве $C([0, T])$ определены вероятностные меры $\mathbb{P}^n$. Воспользовавшись следующим утверждением ([24], 11.2), покажем, что эти меры слабо сходятся к мере $\mathbb{P}$, порожденной процессом S_t и мерой $\tilde{\mathbb{P}}$.

Лемма 3.1 Пусть коэффициенты $a(t, x)$ и $b(t, x)$ диффузионного процесса ξ_t , определяемого уравнением (3.2), являются ограниченными, непрерывными функциями и удовлетворяют условиям (3.3). Далее, пусть заданы переходные вероятности $P_t^{\Delta t}(x, dy)$, которые аналогично предыдущему порождают меры $\mathbb{P}^{\Delta t}$ на $C([0, T])$, и при $\Delta t \rightarrow 0$ имеют

место следующие пределы равномерно по (t, x) и для произвольного ε :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} \int_R P_t^{\Delta t}(x, dy)(y - x) &\rightarrow b(t, x), \\ \frac{1}{\Delta t} \int_R P_t^{\Delta t}(x, dy)(y - x)^2 &\rightarrow a^2(t, x), \\ \frac{1}{\Delta t} P_t^{\Delta t}(x, \{y : |y - x| \geq \varepsilon\}) &\rightarrow 0,\end{aligned}$$

тогда $\mathbb{P}^{\Delta t}$ слабо сходятся к мере, порожденной процессом ξ_t .

Чтобы иметь дело с ограниченными коэффициентами, вместо S_t рассмотрим процесс $x_t = \ln S_t$ и последовательность $\bar{x}_k = \ln \bar{S}_k$. Уравнения (3.16) и (3.17) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_j p_t(e^x, e^{x_j})[e^{x_j - x} - 1] = \frac{e^{r\Delta t} - 1}{\Delta t}, \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_j p_t(e^x, e^{x_j})[e^{2(x_j - x)} - 1] = \frac{e^{(2r + \sigma^2(t, e^x))\Delta t} - 1}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

Поскольку при $\Delta t \rightarrow 0$ правые части равномерно сходятся соответственно к r и $2r + \sigma^2(t, e^x)$, то имеет место равномерная сходимость левых частей к тем же пределам. Поскольку $p_t(e^x, e^y) = 0$ при $|y - x| > mh\sqrt{\Delta t}$, то отсюда следует третье условие леммы, а также неравенство

$$\sum_j p_t(e^x, e^{x_j})|x - x_j|^3 \leq C(\Delta t)^{1.5}.$$

Раскладывая левые части (3.18), (3.19) в ряды Тейлора и переходя к пределу, получаем уравнения

$$\begin{aligned}b(t, x) + \frac{1}{2}a^2(t, x) &= r, \\ 2b(t, x) + 2a^2(t, x) &= 2r + \sigma^2(t, e^x),\end{aligned}$$

откуда находим $a^2(t, x) = \sigma^2(t, e^x)$ и $b(t, x) = r - \sigma^2(t, e^x)$ (ср. (3.12)).

Следствие. Если платежная функция f - непрерывный ограниченный функционал на $C([0, T])$, то $\int f d\mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{C}(f)$.

Рассмотрим вопрос о калибровке модели на триномиальном дереве. Цена опциона покупки с датой исполнения t_n и ценой исполнения K выражается формулой

$$\mathcal{C}(t_n, K) = e^{-rt_n} \sum_j p_n(j) [S_j - K]^+,$$

где $p_n(j)$ вероятность попасть на n -ом шаге в состояние S_j . Поскольку по формуле полных вероятностей $p_n(j) = \sum_l p_{n-1}(l) p_n(l, j)$, то

$$\mathcal{C}(t_n, K) = e^{-r\Delta t} \sum_j \sum_l \lambda_{n-1}(l) p_n(l, j) [S_j - K]^+, \quad (3.20)$$

где $\lambda_n(i) = e^{-rt_n} p_n(i)$. Предполагая, что все переходные вероятности до шага $n-1$ включительно известны, зафиксируем i и вычислим $p_n(i, j)$, $j = i-1, i, i+1$. Нам нужно указать три уравнения, которым удовлетворяют эти вероятности. Два из них - это условие мартингалльности (3.16) и уравнение нормировки $\sum_j p_n(i, j) = 1$. Полагая $K = S_i$, $F_j = S_j e^{r\Delta t}$, из (3.20) имеем

$$e^{r\Delta t} \mathcal{C}(t_n, S_i) = \lambda_{n-1}(i) p_n(i, i+1) [S_{i+1} - S_i] + \sum_{j=i+1} \lambda_{n-1}(j) [F_j - S_i],$$

откуда получаем выражение для $p_n(i, i+1)$. Используя (3.17), можно вычислить $\sigma(t_n, S_i)$.

3.1.5 Модель стохастической волатильности

В данной модели рынок описывается двумя диффузионными процессами

$$dS_t/S_t = \sigma(y_t) dw_t^{(1)} + r dt, \quad (3.21)$$

$$dy_t = a(y_t) dw_t^{(2)} + b(y_t) dt, \quad (3.22)$$

где $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ - винеровские процессы, с коэффициентом корреляции ρ . Можно считать, что $w_t^{(2)} = w_t^{(1)}\rho + w_t^{(3)}\sqrt{1-\rho^2}$, где $w^{(3)}$ - винеровский процесс независимый от $w^{(1)}$. Заметим, что в некоторых моделях [16] коэффициент σ зависит дополнительно от S_t ; коэффициенты a и b часто выбираются такими, чтобы существовало стационарное распределение для процесса y_t .

Предположим, что уравнение (3.22) имеет решение, такое что для процесса $\sigma_t = \sigma(y_t)$ выполнено условие

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right) < \infty,$$

тогда нетрудно видеть, что процесс S_t может быть представлен в виде

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma_s dw_s^{(1)} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + rt \right).$$

Укажем, хеджирующую стратегию $\pi = (X_0, \{\gamma_t\})$, оптимальную по среднеквадратичному критерию, то есть стратегию решающую следующую оптимизационную задачу

$$\min_{\pi} \mathbf{E}(\tilde{X}_T^{\pi} - \tilde{f}(S_T))^2.$$

Положим $\mathcal{C}(u, x, y) = \mathbf{E}_{x,y} e^{-ru} f(S_u)$ и рассмотрим процесс

$$\psi_t = \mathbf{E}(e^{-rT} f(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} \mathcal{C}(T-t, S_t, y_t).$$

Применяя к нему формулу Ито и учитывая, что ψ_t - мартингал, получим

$$d\psi_t = e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} S_t \sigma(y_t) dw_t^{(1)} + e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} a(y_t) dw_t^{(2)}.$$

Проинтегрируем это выражение от 0 до T :

$$\tilde{f}(S_T) = \mathcal{C}(T, S_0, y_0) + \int_0^T \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} d\tilde{S}_t + \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} a dw_t^{(2)}.$$

Рассмотрим некоторую стратегию $\pi = (X_0, \{\gamma_t\})$; из предыдущей формулы имеем

$$\mathbf{E}(\tilde{X}_T^\pi - \tilde{f}(S_T))^2 = \mathbf{E} \left(X_0 + \int_0^T \gamma_t d\tilde{S}_t - \mathcal{C} - \int_0^T \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} d\tilde{S}_t - \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} a dw_t^{(2)} \right)^2.$$

Обозначим

$$\gamma_t^* = \frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t, y_t)}{\partial x} + \rho \frac{a(y_t)}{\sigma(y_t) S_t} \frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t, y_t)}{\partial y},$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f}(S_T))^2 &= \\ &= \mathbf{E} \left(X_0 - \mathcal{C} + \int_0^T (\gamma_t - \gamma_t^*) \sigma \tilde{S}_t dw_t^{(1)} - \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} a \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^{(3)} \right)^2 \\ &= (X_0 - \mathcal{C})^2 + \int_0^T dt \mathbf{E}(\gamma_t - \gamma_t^*)^2 \sigma^2 \tilde{S}_t^2 + \int_0^T dt \mathbf{E} \left(e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} a \right)^2 (1 - \rho^2). \end{aligned}$$

Ясно, что минимум данного выражения достигается при $X_0 = \mathcal{C}$ и $\gamma_t = \gamma_t^*$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.3 *Оптимальная хеджирующая по критерию среднеквадратичного отклонения стратегия имеет вид:*

$$X_0 = \mathcal{C}, \quad \gamma_t = \frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t, y_t)}{\partial x} + \rho \frac{a(y_t)}{\sigma(y_t) S_t} \frac{\partial \mathcal{C}(T-t, S_t, y_t)}{\partial y}.$$

При $\rho^2 = 1$ хеджирование является полным, т.е. $X_T = f(S_T)$.

Рассмотрим вопрос о вычислении цен стандартных опционов. Процесс цен может быть представлен в виде $S_t = S_0 \exp(x_t + rt)$, где

$$dx_t = \sigma(y_t) dw_t^{(1)} - \frac{1}{2} \sigma^2(y_t) dt, \quad x_0 = 0.$$

Мы можем определить новую меру $d\bar{\mathbf{P}} = e^{x_T} d\mathbf{P}$, через которую цена покупки выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= e^{-rT} \mathbf{E}(S_0 e^{x_T + rT} - K)^+ \\ &= S_0 \bar{\mathbf{P}}(x_T > \ln(K/F)) - e^{-rT} K \mathbf{P}(x_T > \ln(K/F)) \\ &= S_0 P_1 - e^{-rT} K P_2,\end{aligned}$$

где $F = e^{rT} S_0$. Получим уравнение для P_1 (для P_2 оно может быть получено аналогично). Процесс

$$\bar{w}_t = w_t^{(1)} - \int_0^t \sigma(y_u) du$$

является винеровским по мере $\bar{\mathbf{P}}$ и через него процессы x_t и y_t выражаются в виде

$$\begin{aligned}dx_t &= \sigma d\bar{w}_t + \frac{1}{2} \sigma^2 dt, \\ dy_t &= a d\bar{w}_t + (a\sigma\rho + b)dt,\end{aligned}$$

где $\tilde{w}_t = \rho \bar{w}_t + \sqrt{1 - \rho^2} w_t^{(3)}$. Рассмотрим характеристическую функцию $\varphi(t, x, y, \eta) = \mathbf{E}(e^{i\eta x_t} | x_0 = x, y_0 = y)$. Она имеет вид (3.9) и, следовательно, при условии гладкости, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \rho \sigma(y) a(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (b(y) + \rho a(y) \sigma(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}.\end{aligned}$$

и начальному условию $\varphi(0, x, y, \eta) = e^{i\eta x}$. Функция φ может быть представлена в виде

$$\varphi(t, x, y, \eta) = e^{i\eta x} \mathbf{E}(e^{i\eta x_t} | x_0 = 0, y_0 = y) = e^{i\eta x} \tilde{\varphi}(t, y, \eta).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \sigma^2(y) \eta^2 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \rho \sigma(y) a(y) \eta i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2(y) \eta i \tilde{\varphi} + (b(y) + \rho a(y) \sigma(y)) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.23}$$

и начальному условию $\varphi(0, y, \eta) = 1$.

Для некоторых моделей стохастической волатильности это уравнение можно решить аналитически; далее можно применить теорему обращения (см., например [19]):

Теорема 3.4 Пусть $\varphi(\eta)$ характеристическая функция распределения $F(z)$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\eta z} \varphi(-\eta) - e^{-i\eta z} \varphi(\eta)}{i\eta} d\eta.$$

Пользуясь этой теоремой, P_1 можно выразить в виде

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-i\eta \ln(K/F)} \tilde{\varphi}(T, y_0, \eta) - e^{i\eta \ln(K/F)} \tilde{\varphi}(T, y_0, -\eta)}{i\eta}.$$

Модель Хестона. Приведем одну из конкретных моделей стохастической волатильности, в которой уравнение (3.23) имеет аналитическое решение.

Положим $\sigma(y) = \sqrt{y}$, $a(y) = \alpha\sqrt{y}$, $b(y) = \beta(y^* - y)$, где α , β и y^* - некоторые константы. Таким образом, процесс y_t удовлетворяет уравнению

$$dy_t = \alpha\sqrt{y_t}dw_t + \beta(y^* - y_t)dt. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.23) в модели Хестона преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -\frac{1}{2}y\eta^2\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\alpha^2y\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \rho\alpha y\eta i\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} + \frac{1}{2}y\eta i\tilde{\varphi} + (\beta(y - y^*) + \rho\alpha y)\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $\tilde{\varphi} = e^{G(t)+H(t)y}$, где $G(0) = 0$, $H(0) = 0$. Подставляя это выражение в уравнение и приравнявая к нулю множители при степенях y^i , $i = 0, 1$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} G' &= -\beta y^* H, \\ H' &= -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 H^2 + \rho\alpha\eta i H + \frac{1}{2}\eta i + (\beta + \rho\alpha)H \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2(H - r_1)(H - r_2), \end{aligned}$$

где $r_{1,2}$ - нули многочлена относительно H в последнем уравнении. Эти уравнения имеют решения

$$\begin{aligned} H(t) &= r_1 r_2 \frac{1 - e^{bt}}{r_2 - r_1 e^{bt}}, \\ G(t) &= -\beta y^* \left[r_1 t + \frac{r_1}{b} \ln \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1 e^{bt}} + \frac{r_2}{b} \ln \frac{r_2 - r_1 e^{bt}}{r_2 - r_1} \right], \end{aligned}$$

где $b = 0.5\alpha^2(r_1 - r_2)$.

Решение уравнение (3.24) можно указать в явном виде, в предположении, что $n = 4\beta y^*/\alpha^2$ - целое число. Для $i = 1, \dots, n$ положим

$$x_t^{(i)} = x_0 e^{-0.5\beta t} + 0.5\alpha \int_0^t e^{0.5\beta(s-t)} dw_s^{(i)},$$

где $w^{(i)}$ - независимые винеровские процессы. Отметим, что $x_t^{(i)}$ удовлетворяют уравнению

$$dx_t^{(i)} = 0.5\alpha dw_t^{(i)} - 0.5\beta x_t^{(i)} dt.$$

Применяя формулу Ито к процессу $y_t = \sum_{i=1}^n \left(x_t^{(i)}\right)^2$, получим

$$\begin{aligned} dy_t &= \sum_{i=1}^n \left(-\beta (x_t^{(i)})^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 \right) dt + \sum_{i=1}^n \alpha x_t^{(i)} dw_t^{(i)} \\ &= \left(-\beta y_t + \frac{n}{4}\alpha^2 \right) dt + \alpha \sqrt{y_t} \sum_{i=1}^n \frac{x_t^{(i)}}{\sqrt{y_t}} dw_t^{(i)}. \end{aligned}$$

Поскольку процесс

$$w_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{x_s^{(i)}}{\sqrt{y_s}} dw_s^{(i)}$$

является мартингалом и для него выполнено равенство $\mathbf{E}w_t^2 = t$, то ([5], теорема 4.1) w_t - винеровский процесс и, значит, y_t удовлетворяет уравнению (3.24).

Поскольку процесс y_t однородный по времени, то из (3.11) следует, что переходная плотность $p(s, \eta, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a^2(y)p] - \frac{\partial}{\partial y} [b(y)p].$$

Плотность стационарного распределения $p(y)$ процесса y_t можно найти, переходя к пределу при $s \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} (\alpha^2 y p(y)) - \frac{d}{dy} (\beta(y^* - y)) p(y) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$p(y) = c y^{\gamma y^* - 1} e^{-\gamma y},$$

где $\gamma = 2\beta/\alpha^2$, а c - константа нормировки:

$$c^{-1} = \int_0^\infty y^{\gamma y^* - 1} e^{-\gamma y} dy = \gamma^{-\gamma y^*} \int_0^\infty z^{-\gamma y^* - 1} e^{-z} dz = \gamma^{-\gamma y^*} \Gamma(\gamma y^*).$$

Отметим, что в стационарном режиме процесс колеблется вокруг значения y^* , действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y p(y) dy &= c \int_0^\infty y^{\gamma y^*} e^{-\gamma y} dy = c \gamma^{-\gamma y^* - 1} \int_0^\infty z^{-\gamma y^*} e^{-z} dz \\ &= \frac{1}{\gamma \Gamma(\gamma y^*)} \Gamma(\gamma y^* + 1) = y^*. \end{aligned}$$

3.2 Модели облигаций

Модели облигаций и процентных ставок подробно изложены в монографии Р. Рибонато [11]. Основными наблюдаемыми величинами на рынке являются цены облигаций $P(t, T)$, где t - текущий момент, T - срок погашения. Будем предполагать (см. (1.8)), что цены облигаций могут быть выражены через процесс текущей процентной ставки r_u формулой

$$P(t, T) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} e^{-\int_t^T r_u du}.$$

Через цены облигаций определяются и другие величины, часто используемые на практике: кривая процентных ставок $R(t, T)$, форвардные процентные ставки $f(t, T)$; они вычисляются по формулам

$$R(t, T) = -\frac{1}{T} \ln P(t, T), \quad f(t, T) = -\frac{d}{dT} \ln P(t, T),$$

так что

$$P(t, T) = e^{-TR(t, T)} = e^{-\int_t^T f(t, u) du}.$$

Одна из задач финансовой математики состоит в построении таких моделей текущей процентной ставки, которые позволяли бы воспроизводить наблюдаемые на рынке величины. Часто для процесса r_t используются те же модели, что и для процесса стохастической волатильности; например, процесс волатильности в модели Хестона известен в теории процентных ставок как модель Кокса-Ингерсолла-Росса.

В дальнейшем будем предполагать, что задан винеровский процесс w_t и $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s; s \leq t\}$.

3.2.1 Модель Халла-Уайта

В этой модели предполагается, что процесс процентной ставки удовлетворяет уравнению

$$dr_s = \alpha dw_s + \beta(\theta(s) - r_s)ds,$$

где $\theta(s)$ - некоторая детерминированная функция. В случае, когда θ является константой, данная модель известна как модель Васичека; в этом случае можно в явном виде выразить $P(t, T)$ через параметры модели, однако этих параметров оказывается недостаточно, чтобы описать наблюдаемое поведение P как функции от T .

Функция $\theta(s)$ подбирается таким образом, чтобы наблюдаемая кривая процентных ставок и кривая, полученная по этой модели, совпадали. Нетрудно видеть, что явный вид процесса r_s в данном случае задается формулой

$$r_s = r_t e^{-\beta(s-t)} + \beta \int_t^s \theta(u) e^{-\beta(s-u)} du + \alpha \int_t^s e^{-\beta(s-u)} dw_u.$$

Для определения функции $\theta(t)$ воспользуемся уравнением

$$e^{-\int_t^T f(s)ds} = \mathbf{E}_{r_t} e^{-\int_t^T r_s ds}. \quad (3.25)$$

Обозначая $\theta_1(s) = r_t e^{-\beta(s-t)} + \beta \int_t^s \theta(u) e^{-\beta(s-u)} du$, получаем

$$\int_t^T r_s ds = \int_t^T \theta_1(s) ds + \alpha \int_t^T dw_u \int_u^T ds e^{-\beta(s-u)}.$$

Таким образом, $\int_t^T r_s ds$ при условии, что задано r_t , является нормально распределенной случайной величиной и, значит, мы можем воспользоваться равенством, верным для $\xi \in N(a, \sigma^2)$: $\mathbf{E}e^\xi = e^{a+0.5\sigma^2}$, из которого следует, что

$$\int_t^T f(s)ds = \mathbf{E}_{r_t} \int_t^T r_s ds - 0.5\mathbf{D}_{r_t} \int_t^T r_s ds. \quad (3.26)$$

Обозначим

$$g(T) = 0.5\mathbf{D} \int_t^T r_s ds = \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \int_t^T du \left(1 - e^{-\beta(T-u)}\right)^2.$$

Продифференцировав дважды по T выражение (3.26), получим:

$$f'(T) = -\beta f(T) + \beta \theta(T) - \beta g'(T) - g''(T).$$

Откуда следует, что

$$\theta(T) = f(T) + \frac{1}{\beta} f'(T) + g'(T) + \frac{1}{\beta} g''(T). \quad (3.27)$$

Формула (3.27) указывает на принципиальную возможность для данной модели воспроизвести кривую процентных ставок.

3.2.2 Модель Хита-Джарроу-Мортон

В этой модели предполагается, что форвардные процентные ставки описываются процессом вида

$$d_u f(u, s) = \alpha(u, s)dw_u + \beta(u, s)du, \quad u \leq s, \quad (3.28)$$

где $\alpha(u, s)$, $\beta(u, s)$ – ограниченные прогрессивно измеримые процессы. Оказывается, коэффициенты α и β нельзя выбирать произвольно – они связаны некоторым соотношением, которое мы сейчас выведем. Прежде всего, получим выражение для процесса текущей процентной ставки r_t ; проинтегрировав (3.28) от 0 до t , имеем

$$f(t, s) - f(0, s) = \int_0^t \alpha(u, s)dw_u + \int_0^t \beta(u, s)du.$$

Полагая $t = s$, получаем явное выражение для процесса r_s :

$$r_s = f(0, s) + \int_0^s \alpha(u, s)dw_u + \int_0^s \beta(u, s)du.$$

Далее рассмотрим мартингал

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(e^{-\int_0^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t\right) &= e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) = e^{-\int_0^t r_s ds - \int_t^T f(t, s) ds} \\ &= \exp\left(-\int_0^T f(0, s) ds - \int_0^t dw_u \int_u^T ds \alpha(u, s) - \int_0^t du \int_u^T ds \beta(u, s)\right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Известно ([5], гл. 6), что положительный мартингал φ_t может быть представлен в виде $\varphi_t = \varphi_0 \exp\left(\int_0^t c_u dw_u - 0.5 \int_0^t c_u^2 du\right)$, где c_t обладает свойством $\mathbf{P}\left(\int_0^T c_t^2 dt < \infty\right) = 1$. Поскольку коэффициенты процесса Ито определяются однозначно, то из (3.29) имеем равенство

$$\int_u^T ds \beta(u, s) = 0.5 \left(\int_u^T ds \alpha(u, s)\right)^2.$$

Дифференцируя по T , получаем искомое соотношение

$$\beta(u, T) = \alpha(u, T) \int_u^T \alpha(u, s) ds.$$

3.3 Моделирование диффузионных процессов.

Данный параграф следует, в основном, работам [14, 15]. Предположим, что нам надо промоделировать диффузионный процесс вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s)dw_s + \int_0^t b(x_s)ds, \quad (3.30)$$

коэффициенты которого удовлетворяют (3.3) и $0 \leq t \leq T$.

Сначала покажем, что для некоторой константы C при $t \leq T$

$$\mathbf{E}_x x_t^2 \leq C(x^2 + 1). \quad (3.31)$$

Положим $\tau_N = \sup\{s \leq T : |x_s| \leq N\}$ и обозначим $\rho_s = |x_s| 1_{\{t < \tau_N\}}$. Возводя в квадрат выражение (3.30) и умножая на $1_{\{t < \tau_N\}}$, получим оценку

$$x_t^2 1_{\{t < \tau_N\}} \leq 3 \left[x_0^2 + 1_{\{t < \tau_N\}} \left(\int_0^t a(x_s)dw_s \right)^2 + 1_{\{t < \tau_N\}} \left(\int_0^t b(x_s)ds \right)^2 \right].$$

Взяв математическое ожидание и обозначив $y_N(t) = \mathbf{E}_x x_t^2 1_{\{t < \tau_N\}}$, имеем

$$y_N(t) \leq 3 \left[x^2 + \int_0^t ds \mathbf{E}_x a^2(x_s) 1_{\{s < \tau_N\}} + T \int_0^t ds \mathbf{E}_x b^2(x_s) 1_{\{s < \tau_N\}} \right]$$

Поскольку $a^2(x)$ и $b^2(x)$ оцениваются сверху величиной $C(1 + x^2)$, то

$$y_N(t) \leq C \left(1 + x^2 + \int_0^t y_N(s)ds \right).$$

Функция $y^{(N)}(t)$ - ограниченная, поэтому итерируя данное неравенство, мы получим сходящийся ряд

$$y^{(N)}(t) \leq C(1 + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ct)^k.$$

Заметим, что константа C в данном неравенстве зависит от функций a и b , но не зависит от N и, поэтому, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим (3.31).

Несложно показать, что при $s, t \leq T$ имеет место также следующая оценка

$$\mathbf{E}(x_t - x_s)^2 \leq C|t - s|. \quad (3.32)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_t - x_s)^2 &= \mathbf{E} \left[\int_s^t a(x_u) dw_u + \int_s^t b(x_u) du \right]^2 \\ &\leq 2\mathbf{E} \left[\int_s^t a^2(x_u) dw_u \right]^2 + 2\mathbf{E} \left[\int_s^t b(x_u) du \right]^2 \\ &\leq 2 \int_s^t \mathbf{E} a^2(x_u) du + 2(t - s) \int_s^t \mathbf{E} b^2(x_u) du. \end{aligned}$$

В силу неравенств (3.3) и (3.31) математические ожидания $\mathbf{E}a^2(x_u)$ и $\mathbf{E}b^2(x_u)$ конечны и мы получаем оценку (3.32).

3.3.1 Оценка погрешности

Будем использовать введенные ранее обозначения $\Delta = T/N$ и $t_n = n\Delta$.

Метод Эйлера. Определим процесс $\tilde{x}_t$: при $t_n < t \leq t_{n+1}$ положим

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t_n} + a(\tilde{x}_{t_n})(w_t - w_{t_n}) + b(\tilde{x}_{t_n})(t - t_n). \quad (3.33)$$

Теорема 3.5 При перечисленных выше условиях имеет место оценка

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |x_t - \tilde{x}_t|^2 \leq C/N.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству следующей, более сложной теоремы, поэтому мы его опускаем.

Метод более высокого порядка точности. Предположим дополнительно, что $a(x)$ и $b(x)$ дифференцируемые функции и определим процесс $\tilde{x}_t$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t &= \tilde{x}_{t_n} + a(\tilde{x}_{t_n})(w_t - w_{t_n}) + b(\tilde{x}_{t_n})(t - t_n) \\ &+ \frac{1}{2}a'(\tilde{x}_{t_n})a(\tilde{x}_{t_n})[(w_t - w_{t_n})^2 - (t - t_n)] \\ &+ b'(\tilde{x}_{t_n})a(\tilde{x}_{t_n})(w_t - w_{t_n})(t - t_n).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Теорема 3.6 *Предположим, что функции $a(x)$ и $b(x)$ дважды дифференцируемы и $|a'(x)| \leq C$, $|b'(x)| \leq C$, $|a''(x)a(x)| \leq C$, $|b''(x)a(x)| \leq C$, тогда*

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} (\tilde{x}_t - x_t)^2 \leq C/N^2.$$

Доказательство. Используя формулу Ито для процесса $\tilde{x}_t$, найдем что на промежутке $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ процесс удовлетворяет уравнению:

$$d\tilde{x}_t = \tilde{a}_t dw_t + \tilde{b}_t dt, \quad (3.35)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\tilde{a}_t &= \tilde{a}(\tilde{x}_{t_n}, w_t) = a(\tilde{x}_{t_n}) + a'(\tilde{x}_{t_n})a(\tilde{x}_{t_n})(w_t - w_{t_n}) + b'(\tilde{x}_{t_n})a(\tilde{x}_{t_n})(t - t_n), \\ \tilde{b}_t &= \tilde{b}(\tilde{x}_{t_n}, w_t) = b(\tilde{x}_{t_n}) + b'(\tilde{x}_{t_n})a(\tilde{x}_{t_n})(w_t - w_{t_n}).\end{aligned}$$

Обозначим $\varepsilon_t = x_t - \tilde{x}_t$. Процесс ε_t удовлетворяет уравнению

$$d\varepsilon_t = a_\varepsilon(t)dw_t + b_\varepsilon(t)dt, \quad (3.36)$$

где коэффициенты $a_\varepsilon(t)$ и $b_\varepsilon(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}a_\varepsilon(t) &= a(x_t) - \tilde{a}(\tilde{x}_{t_n}, w_t), \\ b_\varepsilon(t) &= b(x_t) - \tilde{b}(\tilde{x}_{t_n}, w_t).\end{aligned}$$

Оценим математические ожидания $\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t)$ и $\mathbf{E}b_\varepsilon^2(t)$. Представим $a_\varepsilon(t)$ в виде

$$a_\varepsilon(t) = [a(x_t) - \tilde{a}(x_{t_n}, w_t)] + [\tilde{a}(x_{t_n}, w_t) - \tilde{a}(\tilde{x}_{t_n}, w_t)] = a_1(t) + a_2(t),$$

тогда $\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t) \leq 2\mathbf{E}a_1^2(t) + 2\mathbf{E}a_2^2(t)$. Процесс $a_1(t)$ имеет следующий стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} da_1(t) &= [a'(x_t)a(x_t) - a'(x_{t_k})a(x_{t_n})]dw_t \\ &+ [a'(x_t)b(x_t) + 0.5a''(x_t)a^2(x_t) - b'(x_{t_n})a(x_{t_n})]dt \\ &= a_{11}(t)dw_t + a_{12}(t)dt. \end{aligned}$$

Поскольку $a_1(t_n) = 0$, мы получаем для $\mathbf{E}a_1^2(t)$ оценку

$$\mathbf{E}a_1^2(t) \leq 2 \int_{t_n}^t \mathbf{E}a_{11}^2(u)du + 2\Delta \int_{t_n}^t \mathbf{E}a_{12}^2(u)du.$$

Обозначим $\mu(x) = a'(x)a(x)$. Эта функция имеет ограниченную производную, поэтому

$$|a_{11}(u)| = |\mu(x_u) - \mu(x_{t_n})| \leq C|x_u - x_{t_n}|.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}a_{11}^2(u) \leq C\mathbf{E}(x_u - x_{t_n})^2 \leq C|u - t_n|$. В силу условий теоремы $a_{12}^2(u) \leq C(1 + x_u^2)$ и, значит $\mathbf{E}a_{12}^2(u) \leq C$. Таким образом, $\mathbf{E}a_1^2(t) \leq C\Delta^2$.

Оценим теперь $\mathbf{E}a_2(t)$. Функция $\lambda(x) = b'(x)a(x)$ также имеет ограниченную производную. Поскольку

$$a_2(t) = a(x_{t_n}) - a(\tilde{x}_{t_n}) + [\mu(x_{t_n}) - \mu(\tilde{x}_{t_n})](w_t - w_{t_n}) + [\lambda(x_{t_n}) - \lambda(\tilde{x}_{t_n})](t - t_n),$$

то имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{E}a_2^2(t) &\leq C \{ \mathbf{E}[a(x_{t_n}) - a(\tilde{x}_{t_n})]^2 + \mathbf{E}[\mu(x_{t_n}) - \mu(\tilde{x}_{t_n})]^2(t - t_n) \\ &+ \mathbf{E}[\lambda(x_{t_n}) - \lambda(\tilde{x}_{t_n})]^2(t - t_n)^2 \} \leq C\mathbf{E}\varepsilon^2(t_n). \end{aligned}$$

Окончательно имеем оценку для $\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t)$:

$$\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t) \leq C[\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_n)]. \quad (3.37)$$

Повторяя практически дословно предыдущие рассуждения, получим аналогичную оценку

$$\mathbf{E}b_\varepsilon^2(t) \leq C[\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_n)]. \quad (3.38)$$

Проинтегрируем выражение (3.36):

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t_n} + \int_{t_n}^t a_\varepsilon(s) dw_s + \int_{t_n}^t b_\varepsilon(s) ds = \varepsilon_{t_n} + A + B.$$

Возведя в квадрат и взяв математическое ожидание, получим

$$\mathbf{E}\varepsilon_t^2 = \mathbf{E}\varepsilon_{t_n}^2 + \mathbf{E}A^2 + \mathbf{E}B^2 + 2\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}A + 2\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}B + 2\mathbf{E}AB.$$

Для оценки $\mathbf{E}A^2$ и $\mathbf{E}B^2$, воспользуемся неравенствами (3.37) и (3.38):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}A^2 &\leq \int_{t_n}^t \mathbf{E}a_\varepsilon^2(s) ds \leq \Delta C(\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_n)) = C\Delta^3 + C\Delta\mathbf{E}\varepsilon^2(t_n), \\ \mathbf{E}B^2 &\leq \Delta \int_{t_n}^t \mathbf{E}b_\varepsilon^2(s) ds \leq \Delta^2 C(\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_n)) = C\Delta^4 + C\Delta^2\mathbf{E}\varepsilon^2(t_n). \end{aligned}$$

Далее, $|\mathbf{E}AB| \leq \mathbf{E}A^2 + \mathbf{E}B^2 \leq C[\Delta^3 + \Delta\mathbf{E}\varepsilon^2(t_n)]$. Из свойств стохастического интеграла следует, что $\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}A = \mathbf{E}\varepsilon_{t_n}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_n}}A = 0$. Оценим теперь $\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}B$. Обозначим

$$B_1 = \int_{t_n}^t (b(x_u) - \tilde{b}(x_{t_n}, w_u)) du, \quad B_2 = \int_{t_n}^t (\tilde{b}(x_{t_n}, w_u) - \tilde{b}(\tilde{x}_{t_n}, w_u)) du.$$

Заметим, что $|\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_n}}B_2| = |b(x_{t_n}) - b(\tilde{x}_{t_n})|(t - t_n) \leq C\Delta|\varepsilon_{t_n}|$, значит, $|\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}B_2| \leq C\Delta\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}^2$. Остается оценить $\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}B_1$.

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_n}}B_1| &= \left| \int_{t_k}^t \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_n}}[b(x_s) - b(x_{t_n})] ds \right| \\ &\leq \int_{t_n}^t ds \int_{t_k}^s du \mathbf{E}_{t_n, x_{t_n}} |b'(x_u)b(x_u) + 0.5 b''(x_u)a^2(x_u)| \\ &\leq C\Delta^2(|x_{t_n}| + 1). \end{aligned}$$

Мы воспользовались условиями теоремы и неравенством (3.31). Отсюда

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}B_1| &\leq C\Delta^2 \mathbf{E}^{1/2}\varepsilon_{t_n}^2 \mathbf{E}^{1/2}(1 + |x_{t_k}|)^2 \leq C(\Delta^3)^{1/2}(\Delta\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}^2)^{1/2} \\ &\leq C(\Delta^3 + \Delta\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку $\mathbf{E}\varepsilon_t^2 \leq (1+C\Delta)\mathbf{E}\varepsilon_{t_n}^2 + C\Delta^3$, откуда следует, что

$$\mathbf{E}\varepsilon_t^2 \leq C\Delta^2. \quad (3.39)$$

Теперь оценим $\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \varepsilon_t^2$:

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \varepsilon_t^2 \leq 2\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t a_\varepsilon(s) dw_s \right)^2 + 2\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t b_\varepsilon(s) ds \right)^2.$$

Первое слагаемое в правой части оценим, используя неравенство для мартингалов (см., например, [5]):

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq t} M_s^2 \leq 4\mathbf{E}M_t^2, \quad (3.40)$$

где M_t - квадратично-интегрируемый мартингал с непрерывными справа траекториями. Применяя неравенство (3.40), а также оценки (3.37), (3.38) и (3.39), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \varepsilon_t^2 &\leq 8 \int_0^T \mathbf{E} a_\varepsilon^2(s) ds + 2T \int_0^T \mathbf{E} b_\varepsilon^2(s) ds \\ &\leq C(\Delta^2 + \max_n \mathbf{E}\varepsilon(t_n)) \leq C\Delta^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3.3.2 Погрешность при вычислении функционалов

Математическое ожидание $F(T, x) = \mathbf{E}_x f(x_T)$ мы оцениваем некоторой случайной величиной $\hat{F}$, такой что $\mathbf{E}\hat{F} = \mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T)$. Среднеквадратичная погрешность состоит из двух частей: погрешность дискретизации и стохастическая погрешность:

$$\mathbf{E}[\hat{F} - F(T, x)]^2 = [\mathbf{E}f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}f(x_T)]^2 + \mathbf{E}(\hat{F} - \mathbf{E}\hat{F})^2.$$

Вторым слагаемым мы займемся в следующем параграфе, а сейчас рассмотрим первое слагаемое. Поскольку

$$|\mathbf{E}f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}f(x_T)| \leq \mathbf{E}^{1/2}[f(\tilde{x}_T) - f(x_T)]^2,$$

то из предыдущего параграфа следует, что, например, в случае схемы (3.33) и липшицевости f верна оценка $|\mathbf{E}f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}f(x_T)| \leq C/\sqrt{N}$. Покажем, что при некоторых условиях порядок погрешности составляет $1/N$, а при небольшом изменении схемы можно получить порядок погрешности $1/N^2$. Будем рассматривать уравнение (3.30) применительно к модели (3.6) и платежным функциям вида $f(x_T)$, таким, что $f(x) \leq Ce^{C|x|}$. Сначала сформулируем некоторые вспомогательные результаты. Обозначим через $\varphi(\sigma^2, x)$ - нормальную плотность по x с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Предположим, что коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат $C^\infty(R)$ и их производные любого порядка ограничены, и пусть $p(t, x, y)$ - плотность распределения случайной величины x_t при условии $x_0 = x$, тогда при $t \geq t' > 0$ для любой l при некоторых C и $\tilde{a}$ верна оценка [25]:

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} p(t, x, y) \right| \leq C \varphi(\tilde{a}^2, x - y). \quad (3.41)$$

Сформулируем аналогичную оценку для плотности $\tilde{p}(t, x, y)$ случайной величины $\tilde{x}_t$, которая понадобится в дальнейшем. Введем обозначение $r(s, x, y) = \varphi(a^2(x)s, y - x - b(x)s)$; при $t_n < t \leq t_{n+1}$ плотность $\tilde{p}(t, x, y)$ может быть выражена в виде

$$\tilde{p}(t, x_0, y) = \int_{R^n} \prod_{i=1}^n dx_i r(\Delta t, x_{i-1}, x_i) r(t - t_n, x_n, y).$$

Пусть дополнительно функция $c(z)$ ограничена вместе с производными до m -го порядка, тогда для $\tilde{p}_c(t, x, y) = \int_R dz \tilde{p}(t_n, x, z) c(z) r(t - t_n, z, y)$ при $t \geq t' > 0$ и $l \leq m$ имеет место оценка [14]:

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial y^l} \tilde{p}_c(t, x, y) \right| \leq C \varphi(\tilde{a}^2, x - y). \quad (3.42)$$

Теорема 3.7 *При перечисленных выше условиях*

$$|\mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}_x f(x_T)| \leq C/N. \quad (3.43)$$

Доказательство. Обозначим $u(t, y) = \int_R dw p(T-t, y, w) f(w)$. Из (3.41) следует, что $u(t, y)$ бесконечно дифференцируема по y . Определим оператор $\mathcal{L}(z)$ на функциях из $C^{1,2}$ формулой

$$\mathcal{L}(z)v(t, y) = \frac{\partial v(t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2}a^2(z)\frac{\partial^2 v(t, y)}{\partial y^2} + b(z)\frac{\partial v(t, y)}{\partial y}.$$

Функция $u(t, y)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}(y)u(t, y) = 0$, поэтому

$$\mathcal{L}(z)u(t, y) = \frac{1}{2}[a^2(z) - a^2(y)]\frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial y^2} + [b(z) - b(y)]\frac{\partial u(t, y)}{\partial y}.$$

Применяя формулу Ито, получим, что погрешность дискретизации равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}_x f(x_T) &= \mathbf{E}_x u(T, \tilde{x}_T) - u(0, x) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_x [u(t_{n+1}, \tilde{x}_{t_{n+1}}) - u(t_n, \tilde{x}_{t_n})] = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \mathbf{E}_x \mathcal{L}(\tilde{x}_{t_n})u(t, \tilde{x}_t). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{L}(\tilde{x}_{t_n})u(t, \tilde{x}_t) = \mathcal{L}(\tilde{x}_{t_n})u(t, \tilde{x}_t) - \mathcal{L}(\tilde{x}_{t_n})u(t_n, \tilde{x}_{t_n})$, то применяя еще раз формулу Ито, получим

$$\mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}_x f(x_T) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \int_{t_n}^t ds \mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n})u(s, \tilde{x}_s). \quad (3.44)$$

Математическое ожидание в последнем выражении запишем в виде

$$\mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n})u(s, \tilde{x}_s) = \int_{R^2} dz dy \tilde{p}(t_n, x, z) r(s - t_n, z, y) \mathcal{L}^2(z)u(s, y). \quad (3.45)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место представление

$$\mathcal{L}^2(z)u(s, y) = \sum_{m=1}^4 u_y^{(m)}(s, y) \sum_j \alpha_{mj}(z) \beta_{mj}(y),$$

где функции α_{mj} и β_{mj} являются полиномами от a и b и их производных до порядка 2 включительно. При $s \leq T/2$ применяя оценку (3.41), получим $|u_y^{(m)}(s, y)| \leq \int_R dw \left| p_y^{(m)}(y, T-s, w) f(w) \right| \leq C e^{C|y|}$ и, значит, $|\mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n}) u(s, \tilde{x}_s)| \leq C$. В случае, когда $s > T/2$, произведя интегрирование по частям в (3.45), и применяя неравенство (3.42), получим такую же оценку; подставляя ее в (3.44), получаем утверждение теоремы.

Теорема 3.8 *Существует величина Ψ , такая что*

$$\mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T) = F(T, x) + \frac{1}{N} \Psi + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (3.46)$$

Доказательство. Положим $\psi(t, x) = \mathcal{L}^2(x) u(t, x)$ и преобразуем выражение $\mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n}) u(s, \tilde{x}_s)$ в (3.44) к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n}) u(s, \tilde{x}_s) &= \mathbf{E}_x [\mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n}) u(s, \tilde{x}_s) - \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_n}) u(t_k, \tilde{x}_{t_n})] \\ &+ \mathbf{E}_x [\psi(t_n, \tilde{x}_{t_n}) - \psi(t_n, x_{t_n})] \\ &+ \mathbf{E}_x \psi(t_n, x_{t_n}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно $\int_{t_k}^s \mathbf{E}_x \mathcal{L}^3(\tilde{x}_{t_n}) u(\tau, \tilde{x}_\tau) d\tau$; для доказательства конечности математического ожидания под знаком интеграла можно применить те же рассуждения, что и в предыдущей теореме; в результате получим для этого слагаемого оценку C/N . По отношению ко второму слагаемому можно применить саму теорему, что также дает оценку C/N . Подставляя третье слагаемое в (3.44), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_x \psi(t_n, x_{t_n}) (t_{n+1} - t_n)^2 / 2 &= \frac{T}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_x \psi(t_n, x_{t_n}) (t_{n+1} - t_n) = \\ &= \frac{T}{2N} \int_0^T dt \mathbf{E}_x \psi(t, x_t) - \frac{T}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt [\mathbf{E}_x \psi(t, x_t) - \mathbf{E}_x \psi(t_n, x_{t_n})] \end{aligned}$$

В последнем выражении первое слагаемое определяет вид константы Ψ из (3.46):

$$\Psi = \frac{T}{2} \int_0^T dt \mathbf{E}_x \psi(t, x_t).$$

В остальных слагаемых применим формулу Ито:

$$\mathbf{E}_x \psi(t, x_t) - \mathbf{E}_x \psi(t_k, x_{t_k}) = \int_{t_k}^t ds \mathbf{E}_x \mathcal{L}(x_s) \psi(s, x_s)$$

и оценку (3.41), так что $|\mathbf{E}_x \psi(t, x_t) - \mathbf{E}_x \psi(t_k, x_{t_k})| \leq C/N$.

Теорема доказана.

Следствие. Отметим, что Ψ зависит, вообще говоря, от x и T , но существенно то, что Ψ не зависит от N . Это обстоятельство позволяет построить оценку с систематической погрешностью на порядок меньше, чем у исходной оценки, а именно оценка $2\widehat{F}_{2N} - \widehat{F}_N$, имеет погрешность порядка N^{-2} , в то время как у оценки $\widehat{F}_N$ порядок погрешности всего лишь N^{-1} .

3.3.3 Оценки с минимальной дисперсией

Как правило, платежная функция зависит от ряда параметров (цена исполнения K , уровень барьера H и т.д.), причем интерес для вычислений представляет не один конкретный опцион, а целый набор опционов. При этом важно уметь вычислять эти опционы таким образом, чтобы суммарная дисперсия была бы мала. Рассмотрим эту задачу для диффузионного процесса.

Пусть процесс x_t имеет стохастический дифференциал

$$dx_t = a_t dw_t + b_t dt.$$

Предположим, что $f_\theta(x(\cdot))$ - функционалы на траекториях процесса x_t , θ - некоторый параметр, который принимает значения из некоторого множества Θ ; будем предполагать, что $\mathbf{E} f_\theta^2 \leq C$.

Построим оценки метода **существенной выборки** для $\mathcal{C}_\theta = \mathbf{E} f_\theta$. Рассмотрим с.в.

$$\rho_T = \exp \left(\int_0^T \zeta_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta_t^2 dt \right),$$

где ζ_t удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Мы можем определить вероятностную меру $\tilde{\mathbf{P}}$: $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$; через $\tilde{\mathbf{E}}$ обозначим ожидание по мере $\tilde{\mathbf{P}}$. Отметим, что процесс $\tilde{w}_t = w_t - \int_0^t \zeta_s ds$ является винеровским относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$, а стохастический дифференциал процесса x_t может быть выражен в виде

$$dx_t = a_t d\tilde{w}_t + (b_t + a_t \zeta_t) dt.$$

Рассмотрим оценки вида $\tilde{C}_\theta = f_\theta / \rho$. Очевидно, что $\tilde{\mathbf{E}} \tilde{C}_\theta = C_\theta$. Пусть на Θ задана вероятностная мера $Q(d\theta)$, которая определяет вес дисперсии в точке θ . Рассмотрим задачу минимизации по ζ взвешенной дисперсии

$$\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}} (\tilde{C}_\theta - C_\theta)^2 Q(d\theta).$$

Очевидно, что задача сводится к минимизации взвешенного второго момента $\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{C}_\theta^2 Q(d\theta)$. Обозначим $\tilde{G} = (\int_{\Theta} f_\theta^2 Q(d\theta))^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{C}_\theta^2 Q(d\theta) = \tilde{\mathbf{E}} (\tilde{G} / \rho)^2. \quad (3.47)$$

Рассмотрим мартингал $\tilde{\mu}_t = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \tilde{G}$. Поскольку выполнены условия теоремы 2.1, то существует процесс $\tilde{\alpha}_t$, такой что

$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu}_0 + \int_0^t \tilde{\alpha}_s dw_s, \quad \mathbf{E} \int_0^T \tilde{\alpha}_t^2(\omega) dt < \infty.$$

Положим $\tilde{\zeta}_t = \tilde{\alpha}_t / \tilde{\mu}_t$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_T &= \exp \left(\int_0^T \tilde{\zeta}_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{\zeta}_t^2 dt \right) = \exp \left(\int_0^T \frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} \right)^2 dt \right) \\ &= \exp \left(\int_0^T d \ln \tilde{\mu}_t \right) = \tilde{\mu}_T / \tilde{\mu}_0. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что согласно формуле Ито

$$d \ln \tilde{\mu}_t = \frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} dw_t - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\alpha}_t^2}{\tilde{\mu}_t^2} dt.$$

Поскольку $\tilde{\mu}_T = \tilde{G}$, получаем $\tilde{\mathbf{E}} \left(\hat{G}/\tilde{\rho} \right)^2 = \tilde{\mu}_0^2$. С другой стороны, для любого процесса ζ_t

$$\tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{G}/\rho \right)^2 \geq \tilde{\mathbf{E}}^2 \left(\tilde{G}/\rho \right) = \tilde{\mu}_0^2.$$

Рассмотрим теперь **выделение главной части**. В этом случае мы рассматриваем оценки вида

$$\bar{C}_\theta = f_\theta + \int_0^T z_s dw_s,$$

где z_s - процесс, такой, что $\mathbf{E} \int_0^T z_s^2 ds < \infty$. Очевидно, что $\bar{C}_\theta$ - несмещенная оценка для $\mathcal{C}_\theta$: $\mathbf{E} \bar{C}_\theta = \mathcal{C}_\theta$; задача состоит в том, чтобы найти процесс z_t , минимизирующий $\int_\Theta \mathbf{E} \bar{C}_\theta^2 Q(d\theta)$. Положим $\bar{G} = \int_\Theta f_\theta Q(d\theta)$, тогда

$$\begin{aligned} \int_\Theta \mathbf{E} \bar{C}_\theta^2 Q(d\theta) &= \mathbf{E} \tilde{G}^2 + 2\mathbf{E} \bar{G} \int_0^T z_s dw_s + \mathbf{E} \int_0^T z_s^2 ds \\ &= \mathbf{E} \tilde{G}^2 - \mathbf{E} \bar{G}^2 + \mathbf{E} \left(\bar{G} + \int_0^T z_s dw_s \right)^2. \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{\mu}_t = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \bar{G}$. Опять используя теорему 2.1, получаем, что существует процесс $\bar{\alpha}_t$, такой, что

$$\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_0 + \int_0^t \bar{\alpha}_s dw_s, \quad \mathbf{E} \int_0^T \bar{\alpha}_s^2 ds < \infty.$$

Если положить $z_t = -\bar{\alpha}_t$, то

$$\mathbf{E} \left(\bar{G} + \int_0^T z_s dw_s \right)^2 = \mathbf{E} \left(\bar{G} - \int_0^T \bar{\alpha}_s dw_s \right)^2 = \mathbf{E}(\bar{G} + \bar{\mu}_0 - \bar{\mu}_T) = \bar{\mu}_0^2.$$

Замечание. Если мера Q сосредоточена в одной точке, то минимальная дисперсия оптимальной оценки равна нулю, как в случае существенной выборки, так и в случае выделения главной части.

Рассмотрим пример применения указанных оценок. Пусть рынок определяется уравнениями

$$dS_t/S_t = \sigma(t, S_t)dw_t + rdt, \quad dB_t = rB_tdt.$$

Рассмотрим так называемый «азиатский» опцион, у которого платежная функция имеет вид:

$$f_K = h_K \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right), \quad (3.48)$$

где $h_K(x)$ равно $(x - K)^+$ для опциона покупки и равно $(K - x)^+$ для опциона продажи. Цена опциона равна $\mathcal{C}_K = \mathbf{E}e^{-rT}f_K$. Функционал $\tilde{G}$, определенный выше, имеет в данном случае вид $\tilde{G} = e^{-rT}\tilde{H}(Y_T)$, где

$$Y_t = \frac{1}{T} \int_0^t S_u du, \quad \tilde{H}(x) = \left(\int_{\Theta} h_K^2(x) Q(dK) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассматривая (S_t, Y_t) как а двумерный диффузионный процесс, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_t &= \mathbf{E}(\tilde{G}|\mathcal{F}_t) = e^{-rt}\mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)}\tilde{H} \left(Y_t + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-rt}\mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)}\tilde{H} \left(Y_t + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| S_t, Y_t \right) = e^{-rt}\tilde{u}(t, S_t, Y_t), \end{aligned} \quad (3.49)$$

где

$$\tilde{u}(t, x, y) = \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)}\tilde{H} \left(y + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| S_t = x \right). \quad (3.50)$$

Предположим, что $\tilde{u}(t, x, y)$ достаточно гладкая функция, тогда применяя формулу Ито для $\tilde{u}(t, S_t, Y_t)$, получим представление мартингала $\tilde{\mu}_t$ в виде

$$d\tilde{\mu}_t = e^{-rt}\sigma(t, S_t)S_t\tilde{u}'_x(t, S_t, Y_t)dw_t. \quad (3.51)$$

Таким образом, мы получили представление для ζ_t :

$$\zeta_t = \sigma(t, S_t) S_t \frac{\tilde{u}'_x \left(t, S_t, \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right)}{\tilde{u} \left(t, S_t, \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right)}.$$

Чтобы использовать эту формулу для вычислений, аппроксимируем функцию $\tilde{u}$ следующим образом: рассмотрим процесс $\tilde{S}_t$ с постоянной волатильностью и постоянной процентной ставкой (т.е. модель геометрического броуновского движения) и заменим $\tilde{H}(x)$ кусочно-линейной аппроксимацией. Это позволяет получить аналитическое выражение для ζ_t .

Выделение главной части. Аналогично предыдущему получаем, что процесс z_t задается выражением

$$z_t = -e^{-rt} \sigma(t, S_t) S_t \tilde{u}'_x \left(t, S_t, \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x, y) &= \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \bar{H} \left(y + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| S_t = x \right), \\ \bar{H}(x) &= \int_{\Theta} h_K(x) Q(dK). \end{aligned}$$

3.4 Американский опцион.

Рассмотрим модель (3.6) в виде $dx_t = a(t, x_t)dw_t + b(t, x_t)dt$. Будем предполагать, что выполнены условия $0 < \bar{a}_0 \leq a(t, x) \leq \bar{a}_1$, $b(t, x) \leq \bar{b}_1$. Рассмотрим дискретизацию этой модели: $x_n = x_{n-1} + a_{n-1}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_n + b_{n-1}\Delta t$, где $a_n = a(t_n, x_n)$, $b_n = b(t_n, x_n)$, ε_n - независимые стандартные нормальные величины, $n = 1, \dots, N$. Обозначим также $p_n(x, dy)$ - переходные плотности последовательности x_n и $S_n = e^{x_n}$ - процесс цен. Далее построим некоторую модификацию схемы (2.34). Пусть $\{\xi_{ni}\}$ -

независимые в совокупности случайные величины с плотностью распределения $r_n(y) = \varphi(y - x_0, s^2 t_n)$, $\rho_n(x, y) = p_n(x, y)/r_n(y)$, тогда для произвольной функции $g(x)$ имеем $\mathbf{E}\rho_n(x, \xi_{ni})g(\xi_{ni}) = \mathbf{E}(g(x_n)|x_{n-1} = x)$. Рассмотрим схему для оценки цены опциона, аналогичную схеме (2.34):

$$\check{Y}_n(i) = \max \left(\tilde{f}_n(e^{\xi_{ni}}), \frac{\sum_j \rho_{n+1}(i, j) \check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \rho_{n+1}(i, j)} \right). \quad (3.52)$$

Покажем, что при некоторых условиях оценка $\check{Y}_0$, полученная по этой схеме, является состоятельной. Обозначим $\bar{\rho}_n(i, j) = \rho_n(i, j) / \sum_k \rho_n(i, k)$, тогда аналогично (1.34) имеем

$$|\check{Y}_0 - \tilde{Y}_0| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i_1, \dots, i_n} \bar{\rho}_1(0, i_1) \dots \bar{\rho}_n(i_{n-1}, i_n) |\Delta_n(i_n)|.$$

где $\Delta_n(i) = \sum_j \bar{\rho}_{n+1}(i, j) \check{Y}_{n+1}(j) - \mathbf{E}_{n, x_{ni}} \check{Y}_{n+1}(S_{n+1})$. Возведем обе части в квадрат, тогда учитывая, что $\bar{\rho}_n(i, j)$ является распределением по j , и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\mathbf{E}(\check{Y}_0 - \tilde{Y}_0)^2 \leq N \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i_1, \dots, i_n} \mathbf{E} \prod_{k=1}^n \bar{\rho}_k(i_{k-1}, i_k) \Delta_n^2(i_n).$$

Представим $\Delta_n(i)$ в виде $\Delta_n(i) = \bar{\zeta} / \bar{\eta}$, где $\bar{\zeta} = \frac{1}{M} \sum_j \zeta_j$, $\bar{\eta} = \frac{1}{M} \sum_j \eta_j$,

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \rho_{n+1}(i, j) \left[\check{Y}_{n+1}(j) - \mathbf{E}_{n, x_{ni}} \check{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right], \quad \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \zeta_j = 0, \\ \eta_j &= \rho_{n+1}(i, j), \quad \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \eta_j = 1. \end{aligned}$$

Из (2.12) следует неравенство $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} \right)^2 \leq 2\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \bar{\zeta}^2 + 2\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} \right)^2 (\bar{\eta} - 1)^2$.

Поскольку $\bar{\zeta}$ это выборочное среднее независимых случайных величин с нулевым средним, то $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \bar{\zeta}^2 \leq \sum_j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \zeta_j^2 / M^2$. Предположим, что платежная функция ограничена: $f \leq K$, тогда $|\zeta_j| \leq K|\eta_j|$. Вычислим

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \eta_j^2 = \int_R dy \frac{p_{n+1}^2(\xi_{ni}, y)}{r_{n+1}(y)} = c_{ni} e^{\frac{(\xi_{ni} - x_0 - b_n \Delta t)^2}{2t_{n+1}s^2 - a_n^2 \Delta t}}, \quad (3.53)$$

где $c_{ni} \leq C$. Определим величины $\psi_k^{(n)}(i)$, $k = 0, \dots, n$:

$$\psi_n^{(n)}(i) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \Delta_n^2(i), \quad \psi_k^{(n)}(i) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\rho}_{k+1}(i, j) \psi_{k+1}^{(n)}(j), \quad k < n,$$

и покажем, что $s > \bar{a}_1$ имеет место оценка

$$\psi_k^{(n)}(i) \leq \min \left(K^2, \frac{C}{M} \sum_{m=k}^n \phi_{m+1, m+1-k}(\xi_{ki}) \right), \quad (3.54)$$

где $\phi_{rl}(\xi) = e^{\frac{(|\xi - x_0| + \bar{b}_1 t_l)^2}{2(s^2 t_r - \bar{a}_1^2 t_l)}}$. Неравенство (3.54) выполнено при $k = n$, поскольку из (3.53) следует, что $\psi_n^{(n)}(i) \leq C \phi_{n+1, 1}(\xi_{ni})$. Предположим, что неравенство выполнено для некоторого $k + 1$; оценим $\psi_k^{(n)}(i)$. Переобозначим $\zeta_j = \rho_{k+1}(i, j) \psi_{k+1}(j)$, $\eta_j = \rho_{k+1}(i, j)$, тогда $\psi_k^{(n)}(i) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\zeta} / \bar{\eta}$. Разобьем область интегрирования и воспользуемся индукционным предположением о том, что $\psi_{k+1}(i) \leq K^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\zeta} / \bar{\eta} &= \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\zeta} / \bar{\eta} 1_{\{\bar{\eta} \geq 1/2\}} + \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\zeta} / \bar{\eta} 1_{\{\bar{\eta} < 1/2\}} \\ &\leq 2 \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\zeta} + K^2 \mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} 1_{\{|\bar{\eta} - 1| > 1/2\}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Оценим первое слагаемое, пользуясь индукционным предположением:

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} \bar{\zeta} \leq \frac{C}{M} \sum_{m=k+1}^n \int_R dy p_{k+1}(\xi_{ki}, y) \phi_{m+1, m-k}(y) \leq \frac{C}{M} \sum_{m=k+1}^n \phi_{m+1, m-k+1}(\xi_{ki}).$$

Для второго слагаемого в (3.55) применим неравенство Чебышева и выражение (3.53):

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_k} 1_{\{|\bar{\eta} - 1| > 1/2\}} \leq 4 \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}} (\bar{\eta} - 1)^2 \leq \frac{C}{M} e^{\frac{(\xi_{ki} - x_0 - b_k \Delta t)^2}{2t_{k+1}s^2 - \bar{a}_k^2 \Delta t}} \leq \frac{C}{M} \phi_{k+1, 1}(\xi_{ki}).$$

Окончательно имеем $\mathbf{E} \left(\check{Y}_0 - \tilde{Y}_0 \right)^2 \leq N \sum_{n=0}^{N-1} \psi_0^{(n)}(x_0) \leq C/M$.

Напомним (см. п. 2.3.1), что аналогичная оценка по независимым траекториям в методе Броуди–Глассермана дает бесконечную дисперсию.

Глава 4

Модели со скачками.

Одним из очевидных недостатков диффузионной модели является то, что траектории процесса цен являются непрерывными, хотя реальные траектории достаточно часто имеют скачки.

4.1 Пуассоновский процесс

Если процесс цен имеет скачки, то возникает некоторая техническая сложность, которую мы рассмотрим на следующем примере.

Пусть процесс цен акций равен $S_t = \lambda t - N_t$, где $N_t = N_t^{(\lambda)}$ - пуассоновский процесс интенсивности λ , σ -алгебры $\mathcal{F}_t$ порождены случайными величинами $\{S_u\}_{u \leq t}$. Обычно полагают, что базовый процесс (в нашем случае - процесс цен) непрерывен справа и имеет пределы слева (т.о., N_t - количество скачков до момента t включительно). Это делает σ -алгебру $\mathcal{F}_t$ богаче и, как следствие, моменты скачков в этом случае являются марковскими моментами.

Для прогрессивно-измеримого процесса γ_t интегралы вида $\int_0^t \gamma_u dN_u$ определим потраекторно, рассматривая для каждого ω $N_u(\omega)$ как функцию ограниченной вариации, а область интегрирования включает правый конец интервала $(0, t]$. Таким образом, если обозначить через τ_k -

момент k -го скачка, то

$$\int_0^t \gamma_u dS_u = \int_0^t \gamma_u \lambda du - \sum_{k=1}^{N_t} \gamma_{\tau_k}. \quad (4.1)$$

Цену самофинансируемого портфеля определим обычным образом:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \gamma_u dS_u + \int_0^t \beta_u dB_u.$$

Пусть процесс B_t , описывающий банковский счет, постоянен, тогда дисконтированный процесс цен $\tilde{S}_t = S_t$ и является мартингалом. Поэтому естественно было бы ожидать, что такой рынок является безарбитражным. Однако, если мы предположим, что единственное ограничение на γ_t является $\mathcal{F}_t$ -измеримость, то в этом случае можно рассмотреть стратегию $\gamma_t = 1$, если $t < \tau_1$ и $\gamma_t = 0$, если $\tau_1 \leq t$, где τ_1 - момент первого скачка. Очевидно, что стратегия γ_t - $\mathcal{F}_t$ -измерима, и, кроме того, $X_T = \lambda \min(T, \tau_1) \geq 0$; таким образом, данный рынок является арбитражным.

Чтобы исключить арбитражность такого рода, введем ограничение на стратегии. Определим σ -алгебру $\mathcal{P}$ на $[0, T] \times \Omega$, как σ -алгебру, порожденную всеми $\mathcal{F}_t$ -согласованными, непрерывными слева процессами; $\mathcal{P}$ называется предсказуемой σ -алгеброй, а процессы, измеримые относительно $\mathcal{P}$ - предсказуемыми процессами [6]. Потребуем, чтобы стратегии были предсказуемыми процессами; кроме того, потребуем, чтобы стратегии были таковы, что X_t является мартингалом. Покажем, что этому условию удовлетворяют, по крайней мере, ограниченные стратегии. В этом случае интегрируемость X_t обеспечена; покажем, что $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} X_t = X_s$.

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}(X_t - X_s) = \int_s^t \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \gamma_u \lambda du - \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \sum_{k=N_s+1}^{N_t} \gamma_{\tau_k}.$$

Поскольку траектория S определяется последовательностью τ_k , то мы можем считать, что γ_t - является функцией от t и τ_k , таких что $\tau_k < t$,

т.е. $\gamma_t = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_k; t)$, при $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$, в частности, при $t = \tau_k$ имеем $\gamma_{\tau_k} = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; \tau_k)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \sum_{k=N_s+1}^{N_t} \gamma_{\tau_k} &= \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{s < t_1 < \dots < t_n < t} dt_1 \dots dt_n \sum_{k=1}^n \gamma(\tau_1, \dots, \tau_{n_s}, t_1, \dots, t_{k-1}; t_k) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda^n \int_{s < t_1 < \dots < t_k < t} dt_1 \dots dt_k \gamma(\dots; t_k) \frac{(t - t_k)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_{s < t_1 < \dots < t_k < t} dt_1 \dots dt_k \gamma(\dots; t_k) e^{-\lambda(t_k-s)} \\
&= \lambda \int_s^t dt_k e^{-\lambda(t_k-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{s < t_1 < \dots < t_k} dt_1 \dots dt_{k-1} \gamma(\dots; t_k) \\
&= \int_s^t \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \gamma_u \lambda du.
\end{aligned}$$

Отметим, что, если бы $\gamma_t = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_k; t)$ при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, то тогда $\gamma_{\tau_k} = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_k; \tau_k)$ и последнее равенство в предыдущих выкладках не имело бы места.

Поскольку X_t - мартингал, то безарбитражность рынка доказывается стандартным образом.

Покажем, что этот рынок полный. Пусть f - некоторая платежная функция. Можно считать, что f является функцией от $\tau_1, \dots, \tau_{N_T}$. Для $k \geq 0$ и $t_1 < \dots < t_k \leq t$ определим функцию

$$\mathcal{C}(t_1, \dots, t_k, t) = e^{-\lambda(T-t)} \sum_{n=k}^{\infty} \lambda^{n-k} \int_{t < t_{k+1} < \dots < t_n < T} dt_{k+1} \dots dt_n f(t_1, \dots, t_n).$$

Вычислим производную по t :

$$\frac{\partial \mathcal{C}(t_1, \dots, t_k, t)}{\partial t} = \lambda [\mathcal{C}(t_1, \dots, t_k, t) - \mathcal{C}(t_1, \dots, t_k, t, t)]. \quad (4.2)$$

Положим $\gamma_t = \lambda^{-1} \partial \mathcal{C}(\tau_1, \dots, \tau_k, t) / \partial t$, где $k = \max\{i : \tau_i < t\}$, тогда согласно (4.2)

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma_t \lambda dt = \mathcal{C}(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) - \mathcal{C}(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_k). \quad (4.3)$$

Из (4.1), (4.3) и равенства $\mathcal{C}(\tau_1, \dots, \tau_{N_T}, T) = f(\tau_1, \dots, \tau_{N_T})$ следует, что

$$\int_0^T \gamma_t dS_t = f(\tau_1, \dots, \tau_{N_T}) - \mathcal{C}(\emptyset, 0),$$

т.е. стратегия $(\mathcal{C}(\emptyset, 0), \{\gamma_t\})$ является хеджем, а рынок - полным.

4.2 Диффузия со скачками

Пусть заданы винеровский процесс w_t , независимый от него пуассоновский процесс N_t и последовательность случайных величин α_i , равномерно распределенных на $[0, 1]$, независимых в совокупности и от процессов w_t , N_t . Положим $\tilde{N}_t = \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_i$ и будем считать, что σ -алгебры $\mathcal{F}_t$ порождены процессами $\tilde{N}_t$, w_t . Можно определить интеграл по процессу $\tilde{N}_t$ аналогично тому, как определялся интеграл по процессу N_t . Однако можно дать более общее определение интеграла - как интеграла по мере в $R_+ \times [0, 1]$, сосредоточенной в точках $\{(\tau_i, \alpha_i)\}$. Положим $J([0, t] \times A) = \sum_{i=1}^{N_t} 1_A(\alpha_i)$. Пусть заданы предсказуемые процессы $c_t(\alpha) = c_t(\alpha, \omega)$, являющиеся измеримыми функциями относительно произведения σ -алгебр $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{B}([0, 1]) \times \mathcal{F}_T$, где $\mathcal{B}$ - σ -алгебры борелевских множеств, тогда выражение для интеграла по мере J имеет простой вид:

$$\zeta_t = \int_0^t \int_0^1 c_u(\alpha) J(du, d\alpha) = \sum_{i=1}^{N_t} c_{\tau_i}(\alpha_i).$$

Отметим, что мы рассматриваем достаточно частный случай; общая теория интегрирования по случайным мерам изложена, например, в [6],

[22]. Если задан предсказуемый процесс γ_t , то интеграл $\int_0^t \gamma_u d\zeta_u$ определяется как

$$\int_0^t \gamma_u d\zeta_u = \int_0^t \int_0^1 \gamma_u c_u(\alpha) J(du, d\alpha).$$

Введем еще одну меру $\mu(dt, d\alpha) = J(dt, d\alpha) - \lambda dt d\alpha$. Поскольку для любого множества A

$$\mathbf{E}(J([0, t], A) | \mathcal{F}_s) = J([0, s], A) + \lambda(t - s)\Lambda(A),$$

где Λ - лебегова мера, то процесс $\mu_t(A) = \mu([0, t], A)$ является мартингалом, а сама мера μ называется мартингальной.

Пусть процессы $c_t(\alpha)$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{E} \int_0^T dt \int_0^1 d\alpha c_t^2(\alpha) < \infty.$$

Доказывается (см. [22]), что процесс $\zeta_t = \int_0^t \int_0^1 c_u(\alpha) \mu(du, d\alpha)$ на $[0, T]$ является квадратично-интегрируемым мартингалом и

$$\mathbf{E}\zeta_t^2 = \mathbf{E} \int_0^t \lambda du \int_0^1 d\alpha c_u^2(\alpha).$$

Далее пусть заданы прогрессивно-измеримые процессы a_t, b_t , такие, что $\mathbf{E} \int_0^T (|b_t| + a_t^2) dt < \infty$. Мы можем построить процесс

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_u dw_u + \int_0^t b_u du + \int_0^t \int_0^1 c_u(\alpha) J(du, d\alpha).$$

Для краткости предыдущую формулу будем записывать в виде

$$dx_t = a_t dw_t + b_t dt + \int_0^1 c_t(\alpha) J(dt, d\alpha).$$

Отметим, что при $b_t = -\int_0^1 c_t(\alpha) \lambda d\alpha$ процесс x_t является мартингалом; в этом случае

$$\mathbf{E}x_t^2 = x_0^2 + \mathbf{E} \int_0^t du \left(a_u^2 + \lambda \int_0^1 d\alpha c_u^2(\alpha) \right).$$

Для процесса x_t и функции $f(t, x) \in C^{1,2}$ имеет место обобщенная формула Ито ([22], с. 143):

$$df(t, x_t) = \left[\frac{\partial f(t, x_{t-})}{\partial t} + b_t \frac{\partial f(t, x_{t-})}{\partial x} + \frac{1}{2} a_t^2 \frac{\partial^2 f(t, x_{t-})}{\partial x^2} \right] dt + a_t \frac{\partial f(t, x_{t-})}{\partial x} dw_t + \int_0^1 [f(t, x_{t-} + c(t, \alpha)) - f(t, x_{t-})] J(dt, d\alpha). \quad (4.4)$$

Отметим, что последнее слагаемое может быть записано в более наглядном виде - как $f(t, x_t) - f(t, x_{t-})$. Рассмотрим в качестве примера процесс $y_t = e^{x_t}$, тогда

$$dy_t/y_{t-} = (b_t + 0.5a_t^2)dt + a_t dw_t + \int_0^1 [e^{c(t, \alpha)} - 1] J(dt, d\alpha). \quad (4.5)$$

Предположим, что заданы функции $a(t, x)$, $b(t, x)$ и $c(t, x, \alpha)$, тогда мы можем рассмотреть уравнение

$$dx_t = a(t, x_t)dw_t + b(t, x_t)dt + \int_0^1 c(t, x_{t-}, \alpha)J(dt, d\alpha). \quad (4.6)$$

Если входящие в него функции являются глобально липшицевыми по x , то данное уравнение имеет единственное решение ([22], с. 186).

Далее мы построим процесс цен, который представляет из себя диффузию с коэффициентами $\sigma(t, x)$; с интенсивностью $m(t, x)$ ($m(t, x) < \lambda$) в точке (t, x) происходит скачок; относительная величина скачка имеет распределение $F(t, x; dy)$, т.е. в точке (t, x) цена может измениться на величину xy . Чтобы после скачка цена оставалась положительной, будем предполагать, что распределения $F(t, x; dy)$ были сосредоточены на $(-1, \infty)$, кроме того, предположим, что $\int_R y^2 F(t, x; dy) < C$. Поскольку распределения $F(t, x; dy)$ нормированы, то m и F определяются мерами $\nu(t, x; dy) = m(t, x)F(t, x; dy)$. Введем функцию распределения

$$\tilde{F}(t, x; y) = (m(t, x)/\lambda)F(t, x; y) + (1 - m(t, x)/\lambda)1_{R_+}(y).$$

и обозначим $\psi(t, x, \alpha)$ решение уравнения $\tilde{F}(t, x; y) = \alpha$, так что

$$\int_0^1 \psi(t, x, \alpha) \lambda d\alpha = \int_R y \nu(t, x; dy).$$

Из условий на F следует, что $\psi(t, x, \alpha) > -1$.

Рассмотрим уравнение вида

$$dS_t/S_{t-} = \rho(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dw_t + \int_0^1 \psi(t, S_{t-}, \alpha)J(dt, d\alpha). \quad (4.7)$$

При липшицевости и ограниченности коэффициентов данное уравнение имеет единственное решение. Введем процесс

$$\begin{aligned} x_t &= \ln S_0 + \int_0^t \sigma(u, S_u)dw_u + \int_0^t \left[\rho(u, S_u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u, S_u) \right] du \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \ln(1 + \psi(t, S_{u-}, \alpha))J(du, d\alpha). \end{aligned}$$

Из (4.5) следует, что $y_t = e^{x_t}$ удовлетворяет уравнению (4.7). Таким образом, процесс S_t может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma(u, S_u)dw_u + \int_0^t \left[\rho(u, S_u)du - \frac{1}{2}\sigma^2(u, S_u) \right] du \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \psi(\tau_i, S_{\tau_i-}, \alpha_i)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Пусть $B_t = B_0 e^{rt}$; будем считать, что

$$\rho(t, x) = r - \int_0^1 \psi(t, x, \alpha) \lambda d\alpha = r - \int_R y \nu(t, x; dy),$$

тогда дисконтированные цены $\tilde{S}_t$ являются мартингалом и

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-} = \sigma(t, S_t)dw_t + \int_0^1 \psi(t, S_{t-}, \alpha)\mu(dt, d\alpha). \quad (4.9)$$

Пусть задана платежная функция $f = f(S_T)$. Рассмотрим хеджирование в среднеквадратичном, при котором нужно найти стратегию π , минимизирующую

$$\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f})^2 \quad (4.10)$$

Положим $\mathcal{C}(t, x) = \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} f | S_t = x)$ и предположим, что эта функция принадлежит $C^{1,2}$. Применим формулу Ито для мартингала

$$\tilde{Y}_t = \mathbf{E}(\tilde{f} | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} \mathcal{C}(t, S_t),$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_T &= \tilde{Y}_0 + \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial \mathcal{C}(t, S_{t-})}{\partial x} S_{t-} \sigma(t, S_{t-}) dw_t \\ &+ \int_0^T \int_0^1 e^{-rt} [\mathcal{C}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha)) - \mathcal{C}(t, S_{t-})] \mu(dt, d\alpha). \end{aligned} \quad (4.11)$$

С другой стороны, пусть γ_t - предсказуемый процесс, тогда дисконтированная цена портфеля равна

$$\begin{aligned} \tilde{X}_T &= X_0 + \int_0^T \gamma_t d\tilde{S}_t \\ &= X_0 + \int_0^T \gamma_t \tilde{S}_{t-} \sigma(t, S_{t-}) dw_t + \int_0^T \int_0^1 \gamma_t \tilde{S}_{t-} \psi(t, S_{t-}, \alpha) \mu(dt, d\alpha). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Вычитая (4.11) из (4.12) и учитывая, что $\tilde{Y}_T = \tilde{f}$, $Y_0 = \mathbf{E}\tilde{f}$, получаем погрешность хеджирования

$$\begin{aligned} \tilde{X}_T - \tilde{f} &= X_0 - \mathbf{E}\tilde{f} + \int_0^T e^{-rt} \left[\gamma_t - \frac{\partial \mathcal{C}(S_{t-}, t)}{\partial x} \right] S_{t-} \sigma(t, S_{t-}) dw_t \\ &+ \int_0^T \int_0^1 e^{-rt} [\gamma_t S_{t-} \psi(t, S_{t-}, \alpha) - \mathcal{C}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha))) + \\ &\quad + \mathcal{C}(t, S_{t-})] \mu(dt, d\alpha). \end{aligned}$$

Возведем в квадрат и возьмем математическое ожидание:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f})^2 &= (X_0 - \mathbf{E}\tilde{f})^2 + \mathbf{E} \int_0^T dt e^{-2rt} \left[\gamma_t - \frac{\partial \mathcal{C}(S_{t-}, t)}{\partial x} \right]^2 S_{t-}^2 \sigma^2(t, S_{t-}) \\ &+ \mathbf{E} \int_0^T dt e^{-2rt} \int_0^1 [\gamma_t S_{t-} \psi(t, S_{t-}, \alpha) - \mathcal{C}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha))) \\ &+ \mathcal{C}(S_{t-}, t)]^2 \lambda d\alpha.\end{aligned}$$

Под знаком интеграла находятся положительные функции, которые являются квадратичными многочленами от γ_t . Следовательно, мы можем получить минимум для $\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f})^2$, если найдем стратегию γ_t , минимизирующую подынтегральное выражение для каждого t . Приравняв соответствующую производную к нулю, получим уравнение

$$\begin{aligned}&\left[\gamma_t - \frac{\partial \mathcal{C}(t, S_{t-})}{\partial x} \right] \sigma^2(t, S_{t-}) S_{t-}^2 \\ &+ \int_{-1}^{\infty} \nu(t, S_{t-}; dy) \left[\gamma_t S_{t-} y - \mathcal{C}(t, S_{t-}(1 + y)) + \mathcal{C}(S_{t-}, t) \right] S_{t-} y = 0.\end{aligned}$$

Отсюда находим выражение для γ_t . Таким образом, доказана теорема:

Теорема 4.1 *Оптимальная по среднеквадратичному критерию стратегия имеет вид $X_0 = \mathcal{C}(T, S_0)$, $\gamma_t = \Delta(t, S_{t-})$, где*

$$\Delta(t, x) = \frac{\sigma^2(t, x) \frac{\partial \mathcal{C}(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{x} \int \nu(t, x; dy) y [\mathcal{C}(t, x(1 + y)) - \mathcal{C}(t, x)]}{\sigma^2(t, x) + \int \nu(t, x; dy) y^2}.$$

4.3 Уменьшение дисперсии

Рассмотрим процесс x_t , заданный (4.6); аналогично параграфу 3.3.3 построим оценки метода **существенной выборки** для $\mathcal{C}_\theta = \mathbf{E}f_\theta(x(.))$. Пусть заданы предсказуемые процессы ζ_t и $\eta_t(\alpha)$, такие, что

$$\eta(t, \alpha) > -1, \quad \zeta_t^2 + \int_0^1 \eta_t^2(\alpha) d\alpha \leq D(t),$$

где $D(t)$ - неслучайная интегрируемая на $[0, T]$ функция. Рассмотрим процесс

$$\begin{aligned} \rho_t = \rho_t(\zeta, \eta) &= \exp \left(\int_0^t \zeta_u dw_u - \int_0^t du \left[0.5 \zeta_u^2 + \int_0^1 \eta_u(\alpha) \lambda d\alpha \right] \right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \eta_{\tau_i}(\alpha_i)). \end{aligned}$$

Этот процесс имеет стохастический дифференциал

$$d\rho_t / \rho_{t-} = \zeta_t dw_t + \int_0^1 \eta_t(\alpha) \mu(dt, d\alpha).$$

При перечисленных выше условиях ρ_T - интегрируемая с.в. и, значит, мартингал. Мы можем определить новую меру $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$ и построить оценки $\tilde{C}_\theta = f_\theta / \rho$, которые являются несмещенными: $\tilde{\mathbf{E}} \tilde{C}_\theta = C_\theta$. Наша задача - минимизировать

$$\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{C}_\theta^2 Q(d\theta) \quad (4.13)$$

по ζ_t и $\eta_t(\alpha)$. Для мартингала $\tilde{\mu}_t$, определенного в параграфе 3.3.3, имеет место представление ([27], стр. 68)

$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu}_0 + \int_0^t \tilde{\alpha}_u dw_u + \int_0^t \int_0^1 \tilde{\beta}_u(\alpha) \mu(du, d\alpha), \quad (4.14)$$

где $\tilde{\alpha}_t, \tilde{\beta}_u(\alpha)$ - предсказуемые процессы. Покажем, что минимум (4.13) достигается при

$$\zeta_t = \tilde{\zeta}_t = \tilde{\alpha}_t / \tilde{\mu}_t, \quad \eta_t(\alpha) = \tilde{\eta}_t(\alpha) = \tilde{\beta}_t(\alpha) / \tilde{\mu}_{t-}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{\mu}_T &= \ln \tilde{\mu}_0 + \int_0^T \frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T dt \frac{\tilde{\alpha}_t^2}{\tilde{\mu}_t^2} - \int_0^T \lambda dt \frac{1}{\tilde{\mu}_t} \int_0^1 d\alpha \tilde{\beta}_t(\alpha) \\
&+ \int_0^T \int_0^1 [\ln(\mu_{u-} + \tilde{\beta}_u(\alpha)) - \ln(\tilde{\mu}_{u-})] J(du, d\alpha) \\
&= \ln \tilde{\mu}_0 + \int_0^T \tilde{\zeta}_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{\zeta}_t^2 dt - \int_0^T \lambda dt \int_0^1 d\alpha \tilde{\eta}_t(\alpha) \\
&+ \int_0^T \ln(1 + \tilde{\eta}_t(\alpha)) J(dt, d\alpha) = \ln \tilde{\mu}_0 + \ln \rho_T(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\rho_T = \tilde{\mu}_T / \tilde{\mu}_0$. Также как в параграфе 3.3.3 отсюда следует оптимальность $\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}$.

Рассмотрим пример. Пусть рынок определяется уравнением (4.9), а опцион - платежной функцией (3.48), тогда для мартингала $\tilde{\mu}_t$ имеет место формула (3.49). Применяя обобщенную формулу Ито, получаем, что в представлении (4.14) процессы $\tilde{\alpha}_t$ и $\tilde{\beta}_t(\alpha)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_t &= e^{-rt} \tilde{u}'_x(t, S_t, Y_t) \sigma(t, S_t) S_t, \\
\tilde{\beta}_t(\alpha) &= e^{-rt} [\tilde{u}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha)), Y_t) - \tilde{u}(t, S_{t-}, Y_t)].
\end{aligned}$$

Литература

- [1] J. C. Cox, R. A. Ross, M. Rubinstein. Option pricing: a simplified approach. Journal of Financial Economics; vol. 7, p.229-263; 1976.
- [2] J. M. Harrison, D. M. Kreps. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. Journal of Economic Theory; vol. 20, p. 381-408; 1979.
- [3] А. Н. Ширяев, Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков, А. В. Мельников. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. Теория вероятностей и ее применения; том 39, вып.1; 1994.
- [4] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. Москва; Фазис; 1998.
- [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. Москва; Наука; 1974.
- [6] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов. Москва; Физико-математическая литература; 1994.
- [7] M. Broadie, P. Glasserman. A stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options. Journal of Computational Finance; vol. 7, N 4; Summer 2004.
- [8] P. Glasserman. Monte Carlo Methods in Financial Ingenering. Springer-Verlag; New York; 2004.

- [9] F. Black, M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy; vol.81, No. 3, p. 637-654; 1973.
- [10] J. C. Hull. Options, Futures, & Other Derivatives. 4-th Edition. Prentice-Hall; 2000.
- [11] R. Rebonato. Interest-Rate Options Models. Second edition. John Wiley & Sons; Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto; 1998.
- [12] V. Bally, L. Caramellino, A. Zanette. Pricing and Hedging American Options by Monte Carlo Methods Using a Malliavin Calculus Approach. Journal of Monte Carlo Methods and Applications; vol. 11, N 2, pp. 97 – 134; 2005.
- [13] V. Bally. An Elementary Introduction to Malliavin Calculus. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique; Rapport de recherche N 4718; ISSN 0249-6399; 2003.
- [14] V. Bally, D. Talay. The Law of the Euler Scheme for Stochastic Differential Equations: II. Convergence Rate of the Density. Journal of Monte Carlo Methods and Applications; vol.2, No 2, pp. 93 – 128; 1996. Также <http://hal.inria.fr/inria-00074016>.
- [15] D. Talay. Probabilistic Numerical Methods for Partial Differential Equations. In: Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations. Lecture Note in Mathematics; 1627, pp. 148-196; Springer; Berlin, Heidelberg; 1996.
- [16] H. Beresticki, J. Busca, I. Florent. Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility Models. Communications on Pure and Applied Mathematics; Vol. LVII, pp. 1352-1373; 2004.
- [17] Campbell R. Harvey's Hypertextual Finance Glossary. <http://www.duke.edu/~charvey/Classes/wpg/glossary.htm>.
- [18] А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Москва; Наука; 1975.

- [19] М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. Москва; Наука; 1966.
- [20] К. Ито, Г. Маккин. Диффузионные процессы и их траектории. Москва; Мир; 1968.
- [21] В. В. Петров. Суммы независимых случайных величин. Москва; Наука; 1972.
- [22] И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов. Т. 3. Москва; Наука; 1975.
- [23] А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва; Мир; 1968.
- [24] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. Multidimensional Diffusion Processes. Springer; Berlin, Heidelberg; 1979, 1997.
- [25] S. Kusuoka, D. Strook. Applications of Malliavin calculus. Part II. Fac. Sci. Univ. Tokyo; vol. 32, pp. 1-36; 1985.
- [26] B. Øksendal. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Application. 6th ed. Springer - Verlag; Berlin, Heidelberg, New York; 2003.
- [27] Rong Situ. Theory of stochastic differential equations with jumps and Applications. Springer Science + Business Media, Inc.; 2005.
- [28] П. Ботев. Метод стохастической сетки для вычисления цены многомерных опционов американского типа. В сб. Методы Монте-Карло в финансовой математике; стр. 5 - 35; ред. С.М. Ермаков и Ю.Н. Каштанов; типография НИИХ СПбГУ; 2006.
- [29] A. A. Gormin, Y. N. Kashtanov. The weighted variance minimization for option pricing. Journal of Monte Carlo Methods and Applications; vol. 13, N 5-6, pp. 333 - 351; 2007.

- [30] A. A. Gormin, Y. N. Kashtanov. The weighted variance minimization in jump-diffusion stochastic volatility models. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2008, pp. 383-394; Springer, Berlin; 2009.

Научное издание

Каштанов Юрий Николаевич

**Модели финансовой математики
и статистическое моделирование**

Подписано в печать 14.06.13. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.

Печать ризографическая. Усл. печ. л. 6,51.

Тираж 50 экз. Заказ 5803.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 26