

Условная вероятность. Независимость событий. Испытания Бернулли

В.В. Некруткин

кафедра статистического моделирования <http://statmod.ru>, матмех СПбГУ
Материал к практическим занятиям по теории вероятностей, 2018 г.

1 Условная вероятность, формула умножения и формула полной вероятности

Определение условной вероятности. Представим себе, что мы сидим здесь, в этой комнате, а в это время кто-то за стенкой проводит случайный эксперимент. В этом эксперименте нас интересует событие A . Если мы ничего не знаем о том, как проходит этот эксперимент, то шансы осуществиться событию A выражаются для нас числом $P(A)$. Если же кто-то по секрету сообщил нам, что в эксперименте произошло событие B , то эти шансы вполне могут измениться. Например, если $B \subset A$, то эти шансы возрастут с $P(A)$ до 1, а если $A \cap B = \emptyset$, то упадут с $P(A)$ до 0.

Все это приводит к следующему определению.

Определение 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $A, B \in \mathcal{F}$ и $P(B) > 0$. Тогда *условной вероятностью события A при условии B* называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1.1)$$

Смысл этого определения следующий. Если нам известно, что произошло событие B , то пространство элементарных событий «сужается» до B . В то же время при этом условии событие A может произойти только вместе с B . Отсюда и получается формула (1.1).

Иногда вместо $P(A|B)$ пишут $P_B(A)$, последнее обозначение бывает удобно, если событие B фиксировано, а A может меняться. В этой ситуации у нас возникает функция $P_B: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

Предложение 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$ и $P_B: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ — такая функция, что при любом $A \in \mathcal{F}$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Тогда $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ является вероятностным пространством.

Таким образом, условная вероятность при фиксированном условии B является вероятностью, и, следовательно, обладает всеми ее свойствами. Например, из Предложения 1.1 следует, что $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$, а $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$. Использование подобных соотношений при решении задач может быть очень удобно.

Формула умножения вероятностей. Перепишем формулу (1.1) (то есть определение условной вероятности) в виде

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B). \quad (1.2)$$

Полученное равенство традиционно носит название *формулы умножения вероятностей* для двух событий. Вообще говоря, должен вызвать удивление тот факт, что простое равенство, эквивалентное определению, имеет свое собственное название. К этому есть свои причины, причем не математического характера.

Разберем пример, поясняющий суть дела. Пусть в ящике лежат 7 белых и 5 черных шаров. Проводят следующий эксперимент: из ящика поочередно достают два шара (именно так: сначала один, потом — второй). Нужно найти вероятность того, что оба шара белые. Задача, конечно, очень простая и суть ее не в том, чтобы получить правильный ответ, а в том, чтобы проиллюстрировать формулу умножения. Пусть B_1 — событие, состоящее в том, что первый шар белый, соответственно событие B_2 — второй шар белый. По условию нам нужно вычислить вероятность $P(B_2 \cap B_1)$. Запишем согласно (1.2)

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2 | B_1)P(B_1). \quad (1.3)$$

А теперь припишем сомножителям, входящим в правую часть (1.3), числовые значения. Очевидно, $P(B_1) = 7/12$ (в начале эксперимента в ящике 12 шаров, из них 7 белых). Чему равно $P(B_2 | B_1)$, тоже легко понять: после изъятия одного белого шара в ящике осталось 6 белых и 5 черных шаров, поэтому $P(B_2 | B_1) = 6/11$. Итого

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2 | B_1)P(B_1) = \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{22}. \quad (1.4)$$

Обратите внимание! Мы решили эту задачу совсем не так, как положено в схеме равновозможных исходов: вместо того, чтобы подсчитывать число элементов пространства элементарных событий и интересующего нас события $B_2 \cap B_1$, мы даже не описывали эти множества, а вместо этого сами задали две вероятности, одна из которых вообще условная!

Попробуем теперь решить эту задачку по-другому, но опять с использованием формулы (1.2). Запишем

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 | B_2)P(B_2), \quad (1.5)$$

и снова попробуем приписать числовые значения вероятностям $P(B_1)$ и $P(B_1 | B_2)$. Сразу же видно, что это не получается так просто и очевидно, как в первом случае. Действительно, если мы легко приписали условной вероятности $P(B_2 | B_1)$ ее значение $6/11$, то для $P(B_1 | B_2)$ эта операция отнюдь не очевидна!

В чем же дело? Почему простая перестановка событий в формуле (1.2) приводит к такому странному эффекту? Дело в том, что в нашем упражнении присутствует «направление времени»: эксперимент состоит из двух частей, и формула (1.3) соответствует их естественному упорядочиванию, а формула (1.5) не соответствует, в ней время «обращено». Поэтому у нас так хорошо все получилось в первом случае и так плохо — во втором.

Теперь уже можно сформулировать причину нашего интереса к формуле (1.2). Решая задачи типа только что разобранных, мы на самом деле не вычисляем вероятность «по определению», как это делалось в схеме равновозможных исходов, а задаем ее сами, анализируя структуру составного эксперимента. Эксперимент состоит из двух частей, первая из частей «устроена просто», нужные нам вероятности, относящиеся к ней, считаются легко. Вторая часть эксперимента зависит от первой, но если известен результат первой части, то и она «устроена просто».

Нетрудно распространить формулу (1.2) на случай пересечений n событий: Сделайте это сами — придумайте обобщение формулы (1.2) на случай пересечений $n \geq 3$ событий и докажите ее.

Формула полной вероятности. Мы сейчас займемся еще одной простой формулой, связанной с условной вероятностью. Несмотря на свою теоретическую простоту, она имеет очень важное значение для развития вероятностной интуиции, то есть на самом деле для понимания природы случайных явлений. Прежде всего дадим одно определение.

Определение 1.2. Пусть Ω — пространство элементарных событий и $\mathcal{F}$ — σ -алгебра событий. Говорят, что события $B_1, \dots, B_n$ образуют *полную группу событий*, если выполняются два условия:

a) $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ и b) $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Слова «полная группа событий» — это чисто вероятностный термин, обычно в математике вместо него говорят о *разбиении* множества Ω . Если в дополнение к а) и б) потребовать еще, чтобы $P(B_i) > 0$ для любого i , то можно употреблять слова *полная группа существенных событий*.¹

Итак, пусть $B_1, \dots, B_n$ — полная группа существенных событий и A — некоторое событие. Тогда

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i). \quad (1.6)$$

Формула (1.6) называется *формулой полной вероятности*.²

Обсуждение формулы полной вероятности (1.6) снова начнем с примера.

Пусть в первом ящике содержится 7 белых и 5 черных шаров, а во втором ящике — 3 белых и 8 черных. Эксперимент состоит в том, что мы сначала перекладываем один шар из первого ящика во второй, а потом вынимаем один шар из второго ящика. Нас интересует вероятность того, что этот второй шар будет белым.

Попробуем решить эту задачу с помощью формулы полной вероятности. Для этого нам необходимо задать полную группу событий, причем не любую (полной группы событий нет в условиях задачи, мы сами должны ее выбрать, она в нашей власти), а такую, которая наилучшим образом соответствовала бы как структуре самого эксперимента, так и интересующему нас событию. В данном случае это сделать достаточно легко — эксперимент состоит из двух частей, и поэтому естественно описывать в полной группе событий результаты первой части эксперимента.

Выберем в качестве полной группы событий события W_1 и B_1 — из первого ящика вынут белый (White) и черный (Black) шар соответственно. Это действительно полная группа событий — события W_1 и B_1 , конечно же, не пересекаются, и обязательно происходит либо W_1 , либо B_1 .³

Выбрав полную группу событий и обозначив через W_2 событие, состоящее в том, что вынутый из второго ящика шар — белый, запишем согласно (1.6)

$$P(W_2) = P(W_2 | W_1)P(W_1) + P(W_2 | B_1)P(B_1). \quad (1.7)$$

Ну, а теперь посмотрим, что мы можем сказать о правой части (1.7). Очевидно, что $P(W_1) = 7/12$ и $P(B_1) = 5/12$. Точно так же $P(W_2 | W_1) = 4/12$ и $P(W_2 | B_1) = 3/12$. Поэтому

$$P(W_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{43}{144}.$$

Как видите, задача решилась очень просто. Почему? В чем суть формулы полной вероятности? Здесь, как и в формуле умножения, эксперимент состоит из двух частей, первая часть «простая», все нужные связанные с ней вероятности (то есть $P(W_1)$ и $P(B_1)$) считаются легко.

¹Обычно слово «существенных» опускают.

²А что изменится в формуле (1.6), если одно из событий B_i будет иметь нулевую вероятность (то есть не будет «существенным»)? А как будет выглядеть формула полной вероятности, если полная группа существенных событий состоит из счетного множества событий?

³Вообще некоторые события образуют «полную группу», если кроме них ничего произойти не может и никакие два из них не могут произойти вместе.

Вторая часть тоже очень простая, если известен результат первой части эксперимента. Все отличие от формулы умножения состоит в том, что здесь у первого этапа эксперимента может быть несколько исходов, они как раз и перечисляются в полной группе событий.⁴

2 Независимость событий

Независимость двух событий. В обыденной жизни люди часто употребляют слово «независимый» в понятном для всех смысле: если кто-то сейчас на другом конце Земли думает, лечь спать или нет, то вряд ли его решение окажет существенное влияние на то, выпадет ли у нас герб или решка при бросании монеты — эти события «независимые», их связью можно пренебречь. Попробуем записать на языке теории вероятностей, что означает эта независимость.

Пусть A и B — два события, «независимые» на обыденном языке. Какое соотношение должно быть между числами $P(A)$ и $P(A|B)$? Число $P(A)$ — это шансы произойти событию A , число $P(A|B)$ — это те же шансы, если дополнительно известно, что произошло событие B . Раз A и B «независимы», то шансы произойти событию A не изменятся от того, есть у нас информация о том, что B произошло, или этой информации нет. Значит,

$$P(A|B) = P(A). \quad (2.1)$$

Собственно говоря, это равенство можно было бы положить в определение независимости событий A и B . Но в таком определении было бы два недостатка.

Во-первых, для выполнения (2.1) нужно, чтобы выполнялось условие $P(B) > 0$. Это не страшное, но неудобное ограничение: а вдруг мы не знаем, равна ли вероятность $P(B)$ нулю или нет? Тогда мы вообще не смогли бы говорить о независимости. Второй недостаток состоит в том, что прочтение формулы (2.1) должно быть таким: « A не зависит от B », в то время как независимость — явно взаимное понятие: « A и B независимы». Поэтому давайте перепишем (2.1) как

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \quad (2.2)$$

и, домножив обе части равенства (2.2) на $P(B)$, получим симметричную относительно A и B формулу, не содержащую знаменателей:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (2.3)$$

Определение 2.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. События A и B называются *независимыми*, если для них выполнено равенство (2.3).

Следующее свойство независимых событий интуитивно очевидно и очень просто доказывается.

Лемма 2.1. Если A и B независимы, то независимыми являются пары событий (A, B^C) , (A^C, B) и (A^C, B^C) .

Совместная независимость n событий. Рассмотрим теперь три события: A , B и C . Как определить независимость этих *трех* событий? Прежде всего, совершенно естественно считать, что любые два события из трех (то есть A и B , A и C , B и C) должны быть независимы. Но можно ли на этом остановиться? Возвратившись к нашей исходной интерпретации независимости через условную вероятность, мы видим, что требование

$$P(A|B \cap C) = P(A) \quad (2.4)$$

⁴Еще раз отметим, что в условии обсуждаемого примера полная группа событий заранее не задана, мы ее выбрали сами. Здесь этот выбор «очевиден», в более сложных ситуациях правильное задание полной группы событий может оказаться решающим для решения задачи.

совершенно необходимо — шансы произойти событию A не зависят от того, есть ли у нас информация о том, что произошли события B и C вместе, или такой информации нет.

Но (2.4) означает, что $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$, и, по независимости событий B и C , $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Таким образом мы пришли к четырем требованиям, которым должны удовлетворять независимые события A , B и C . Возьмем эти условия в качестве определения.

Определение 2.2. События A , B и C называются независимыми, если

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$;
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Разобравшись с определением независимости для трех событий, перейдем к общему случаю n событий. Дадим индукционное определение: считая, что у нас уже определена независимость $n - 1$ -го события, перейдем от $n - 1$ к n . База индукции — при $n = 2$ — уже есть.

Определение 2.3. Пусть $n \geq 3$. События $A_1, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если выполняются два условия:

1. $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$;
2. любые $n - 1$ событий из n событий $A_1, \dots, A_n$ являются независимыми.

Определение 2.2, является, очевидно, частным случаем Определения 2.3 при $n = 3$. Как выглядит определение независимости для произвольного n , если перевести его с индукционного на «обычный» язык?

Пусть $n = 4$. По Определению 2.3 вероятность пересечения всех четырех событий должна равняться произведению их вероятностей. Но этого мало, в определении сказано, что каждая тройка событий (этих троек будет 4) тоже состоит из независимых событий. Это значит (переходим к Определению 2.3 с $n = 3$), что вероятность пересечения любых трех событий снова равна произведению их вероятностей. Но и этого мало — любая пара событий (этих пар 6) тоже должна быть независимой (сейчас мы уже спустились до базы индукции), так что вероятность пересечения любых двух событий из четырех равняется произведению вероятностей этих событий.

Теперь ясно, как можно более явно переформулировать Определение 2.3:

*для любого $2 \leq k \leq n$ и любых k выбранных из списка $A_1, \dots, A_n$ событий выполняется равенство: вероятность пересечений этих событий равна произведению их вероятностей.*⁵

Как и следовало ожидать, имеет место следующее утверждение.⁶

Лемма 2.2. Рассмотрим события $A_1, \dots, A_n$. Пусть B_1 — одно из двух событий — либо A_1 , либо A_1^C . Аналогично B_2 — это или A_2 , или A_2^C и так далее.

*Если события $A_1, \dots, A_n$ независимы, то $B_1, \dots, B_n$ — тоже независимы.*⁷

⁵Таим образом, в определении независимости n событий участвуют $2^n - n - 1$ равенств. Можно доказать (существуют примеры), что ни одно из них не является лишним.

⁶Докажите, это просто.

⁷С учетом этого утверждения, понятие независимости n событий может быть переформулировано на несколько более современном математическом языке. Сопоставим каждому событию A_i минимальную алгебру $\mathcal{A}_i = (\Omega, \emptyset, A_i, A_i^C)$, содержащую A_i . Тогда события $A_1, \dots, A_n$ независимы, если $P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ для любых $B_i \in \mathcal{A}_i$.

3 Испытания Бернулли

Определение и примеры. Начнем сразу с определения.

Определение 3.1. Рассмотрим составной эксперимент Θ , состоящий в последовательном выполнении n «маленьких» экспериментов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1. Каждый из экспериментов ε_i имеет ровно два исхода, один из которых называется *успехом*, а второй — *неудачей*. Будем обозначать эти исходы U_i и H_i .
2. Вероятность успеха в каждом из экспериментов ε_i одна и та же, обозначим ее p . Таким образом, $P(U_i) = p$. Ясно, что $P(H_i) = 1 - p$.
3. Результаты экспериментов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ независимы.

В этом случае каждый из экспериментов ε_i называют *испытанием Бернулли с вероятностью успеха p* , а про весь эксперимент Θ говорят такую фразу: *проведено n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p* .

Приведем примеры реальных экспериментов, которые (при выполнении некоторых условий) могут быть формализованы как испытания Бернулли.

1. *Бросание гнутой монеты.*

Возьмем монету и ударим по ней молотком. Монета согнется, и если до удара вполне можно было считать, что она при подбрасывании выпадает гербом и решкой с одинаковыми вероятностями $1/2$, то теперь эти вероятности, вообще говоря, изменились. Подкинем монету n раз. При каких условиях на этот эксперимент будут выполняться требования 1 – 3?

Первое требование говорит, что должно быть ровно 2 исхода у каждого бросания. Это значит, что монета не может укатиться в щель, стать на ребро и так далее. Будем считать успехом выпадение герба, а неудачей — выпадение решки.

Второе условие означает, что вероятность выпадения герба одна и та же при любом бросании. Такого рода требования выполняются, если условия эксперимента остаются постоянными — монета не гнется от удара об пол, никто не меняет монету на другую (погнутую иначе) и т.д.

Условие 3 — это условие, обеспечивающее отсутствие памяти в эксперименте. Например, оно осуществляется, если человек, подбрасывающий монету, не видит результатов бросаний и поэтому не может влиять на следующий результат.⁸

2. *Стрельба по мишени.*

Производят n выстрелов по мишени. Два исхода очевидны — «попал» или «не попал» — «успех» или «неудача». Постоянство вероятности успеха — это, как уже говорилось, постоянство условий эксперимента: стреляют все время из одного и того же оружия, освещенность не меняется, стрелок не совершенствует свое умение за время эксперимента и т.д. Независимость исходов обеспечена, если стрелок никак не реагирует на результаты предыдущих выстрелов.

3. *Выздоровление.*

В больнице находится n пациентов. За неделю с каждым из них может произойти одно из двух событий⁹ — улучшение состояния («успех») или неулучшение («неудача»). Когда этот процесс можно описать испытаниями Бернулли?

⁸Предположим, что эксперимент с n бросаниями гнутой монетки проводится следующим образом: первый раз монетка действительно подбрасывается, а затем $n - 1$ раз выкладывается вверх той стороной, которая выпала при первом бросании. В этом случае первые два условия Определения 3.1 выполняются, а третье — нет.

⁹Будем оптимистами!

Постоянство вероятности успеха, несомненно, было бы обеспечено, если бы все пациенты болели одной болезнью, причем в одинаковой стадии. Но это не обязательно. В отличие от примеров с бросанием монетки и стрельбой по мишени, в этом эксперименте заранее не оговорено, какой пациент является «первым» («первое испытание Бернулли»), какой — вторым и так далее. Давайте упорядочим пациентов любым способом, не связанным с их болезнью (скажем, по алфавиту или по росту). Тогда для нас первый и пятый пациенты совершенно эквивалентны (мы просто не знаем, кто чем болен), и вероятность их выздоровления за неделю тоже одинакова.

Если наши больные не общаются друг с другом (и тем самым состояние одного не влияет на самочувствие другого), то можно считать, что они болеют (или выздоравливают) независимо, и описывать эксперимент как испытания Бернулли.

4. Рыбная ловля.

В лодке на озере сидит рыбак с удочкой. В озере живет n рыб. При каких условиях этот эксперимент можно описать испытаниями Бернулли? Предполагается, что рыба с крючка сорваться не может. Что здесь естественно назвать «успехом» с точки зрения рыбака? С точки зрения рыбы?

Формализация. Формула Бернулли. Займемся теперь формалистикой. Прежде всего, как выглядит пространство элементарных событий Ω для n испытаний Бернулли? Каждое элементарное событие — это один («неделимый», «самый маленький») исход эксперимента. В нашем случае элементарное событие — это строка из n букв У и Н. Например,

$$\omega = U_1 H_2 U_3 \dots H_{n-1} U_n \quad (3.1)$$

— это элементарное событие, соответствующее тому, что в первом испытании Бернулли был успех, во втором — неудача, в третьем — удача, ..., в предпоследнем — неудача, а в последнем — успех. Ясно, что Ω состоит из 2^n элементарных событий.

Чему равна вероятность элементарного события? Прежде всего, запишем (3.1) в виде

$$\omega = U_1 H_2 U_3 \dots H_{n-1} U_n = U_1 \cap H_2 \cap U_3 \cap \dots \cap H_{n-1} \cap U_n,$$

где U_i (или H_i) означает событие, состоящее в том, что в i -ом испытании Бернулли произошел успех (или неудача).

Ну, а теперь вычислим $P(\omega)$, пользуясь пунктами 2 и 3 определения испытаний Бернулли. Поскольку (см. п.3) события U и H с разными индексами независимы, то

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P(U_1 \cap H_2 \cap U_3 \cap \dots \cap H_{n-1} \cap U_n) = \\ &= P(U_1)P(H_2)P(U_3) \dots P(H_{n-1})P(U_n) = p(1-p)p \dots (1-p)p = p^k(1-p)^{n-k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $k = k(\omega)$ — число букв U в строке (3.1).

Конечно, вероятность любого другого элементарного события вычисляется точно так же и имеет такой же вид. Таким образом, вероятностное пространство, соответствующее n испытаниям Бернулли с вероятностью успеха $p \neq 1/2$, не сводится к классическому вероятностному пространству, но все элементарные события, соответствующие одинаковому числу успехов k , имеют одну и ту же вероятность, зависящую только от k (ну, и, конечно, от вероятности успеха p и числа испытаний Бернулли n).¹⁰

¹⁰На самом деле в наших рассуждениях есть логический пробел. «По-хорошему» нужно сначала задать пространство элементарных событий в виде множества 2^n цепочек, состоящих из n символов U и H , затем определить вероятности элементарных событий по формуле, аналогичной (3.2), после этого определить события U_i и H_j как объединения соответствующих элементарных событий, а уж потом доказывать свойства 1–3 (точнее, 2–3), введенные нами как определение испытаний Бернулли. Сделать это не сложно, а для решения задач такой формализм не является обязательным.

Выведем отсюда элементарную формулу, называемую *формулой Бернулли*. Рассмотрим n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Для любого $0 \leq k \leq n$ обозначим A_k событие, состоящее в том, что в этих n испытаниях оказалось ровно k успехов. Чему равна вероятность $P(A_k)$?

Прежде всего, все элементарные события, входящие в событие A_k , имеют одинаковую вероятность, равную $p^k(1-p)^{n-k}$.

Следовательно, $P(A_k) = N_{n,k} p^k(1-p)^{n-k}$, где $N_{n,k}$ — число элементарных событий, входящих в множество A_k . Но число элементов множества A_k равно C_n^k . Таким образом, мы вывели **формулу Бернулли**:

$$P(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

4 Задачи

1. В некоторой семье три сестры — Алиса, Бетти и Шарлотта — моют посуду, причем Алиса делает это с вероятностью p_A , Бетти — с вероятностью p_B , а Шарлотта — с вероятностью p_C ($p_A + p_B + p_C = 1$). Если посуду моет Алиса, то она бьет ее с вероятностью q_A , для Бетти соответствующая вероятность равна q_B , а для Шарлотты — q_C . На кухне раздался звон разбитой посуды. Чему равна вероятность того, что ее мыла Алиса?
2. В случайной перестановке чисел $1, 2, \dots, n$ оказалось, что на k -м месте стоит число, большее всех предыдущих. Найти вероятность того, что оно равно n ($1 \leq k \leq n$).
3. Пусть $A, B, C \in \mathcal{F}$ и $P(B \cap C) > 0$. Чему равно $P_B(A|C)$?
4. Из колоды 52 карты достают 5 карт, а потом еще 5 карт. Найти вероятность того, что во второй пятерке нет червей.
5. Из колоды 52 карты достают 5 карт. Обозначим k число тузов среди этих карт. После этого из оставшихся 47 карт достают $k+1$ карту. Найти вероятность того, среди них а) нет королей; б) нет пик.
6. Из колоды 52 карты достают 5 карт. Обозначим k число тузов среди этих карт. После этого из другой колоды в 52 карт достают $k+1$ карту. Найти вероятность того, среди них а) нет королей; б) нет пик.
7. N различных ящиков, в каждом из которых по a белых и b черных шаров, расположены по кругу. Из первого ящика достают шар и перекладывают его во второй ящик, потом снова один шар — из второго в третий и так далее N раз. Найти вероятность того, что число белых и черных шаров во каждом ящике останется тем же.
8. Из колоды в 52 карты достают одну карту. Событие A состоит в том, что эта карта пика, событие B — в том, что она туз. Являются ли события A и B независимыми?
9. Из колоды в 52 карты выкидывают двойку червей. После этого из оставшихся 51 карт достают одну карту. Событие A состоит в том, что эта карта пика, событие B — в том, что она туз. Являются ли события A и B независимыми?
10. а) События A и B несовместны. Когда они будут независимыми?
б) События A и B независимы, причем оба имеют положительную вероятность. Являются ли они несовместными?
11. а) Пусть $P(A) = 0$, B — любое событие. Являются ли независимыми A и B ?
б) Пусть $P(A) = 1$, B — любое событие. Являются ли независимыми A и B ?

12. Один раз бросают игральную кость. События A и B состоят в том, что выпавшее число делится соответственно на 2 и на 3. Являются ли эти события независимыми? Тот же вопрос, если B — событие, состоящее в том, что выпавшее число делится на 5.
13. Найти вероятность того, что в случайной перестановке чисел $1, 2, \dots, n$ все четные числа расположены в порядке возрастания, если известно, что все нечетные расположены в порядке убывания. Как сформулировать ответ на языке независимости событий?
14. Из трех судей на соревновании по фигурному катанию двое принимают правильное решение с вероятностью p независимо друг от друга, а третий бросает монетку. Решение принимается большинством голосов. Нельзя ли сократить число членов жюри, не уменьшая вероятности принятия правильного решения? Монетка — правильная.
15. Каждое воскресенье мальчик играет во дворе в настольный теннис. Ему предлагают сыграть три партии на выбор по одной из трех схем: либо сначала с чемпионом двора, потом — со своим отцом и третью партию снова с чемпионом, либо в обратном порядке — с отцом, потом — с чемпионом и, наконец, снова с отцом. Какой порядок более выгоден мальчику, если а) ему нужно выиграть хотя бы две партии подряд? б) ему нужно выиграть хотя бы две партии из трех? Ни отец мальчика, ни сам мальчик не являются чемпионом двора. Попробуйте объяснить полученные результаты.
16. Двое дуэлянтов стреляются на следующих условиях: сначала стреляет первый дуэлянт, если он попадает, то дуэль заканчивается в его пользу, если же он промахивается, то стреляет второй. Если он попал, то дуэль кончилась (второй победил), нет — снова стреляет первый и так далее до первого попадания любого из стреляющихся (запасы пороха не ограничены). Пусть первый дуэлянт попадает в цель с вероятностью p_1 , а второй — с вероятностью p_2 . Чему равна вероятность того, что дуэль кончится в пользу первого стрелка? в пользу второго стрелка? вничью? При каком соотношении p_1 и p_2 правила дуэли одинаково справедливы для обоих дуэлянтов?
17. В ящике находятся a белых и b черных шаров. n раз с возвращением достают шар из ящика. Найти вероятность того, что ровно 5 раз появится белый шар.
18. Найти вероятность того, что в 10 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $1/3$ выпадет ровно один герб, если известно, что выпал хотя бы один герб.
19. Учащемуся нужно сдать один экзамен, но если он его не сдает, то ему устраивают переэкзаменовку, потом — вторую и так далее. Предположим, что этот эксперимент можно описать испытаниями Бернулли с некоторой вероятностью успеха $p > 0$ (конечно, здесь успех — это сдача экзамена). Чему равна вероятность того, что а) экзамен будет сдан с n -й попытки? б) экзамен будет сдан до n -й попытки? с) найдите вероятность того, что ученик когда-нибудь сдаст экзамен, если число попыток не ограничено.
20. Учащемуся нужно сдать экзамены по k предметам (возможно, с переэкзаменовками). Предполагая, что этот эксперимент может быть описан испытаниями Бернулли с вероятностью успеха p (в частности, из этого предположения следует, что все предметы одинаковы по сложности!), найдите вероятность того, что последний предмет будет сдан с m -й *общей* попытки. Другая формулировка этой задачи: найти вероятность того, что при проведении испытаний Бернулли с вероятностью успеха p успех номер k осуществится при m -м испытании. Конечно, экзамены тут не причем.
21. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что все экзамены когда-нибудь будут сданы, если ограничений на число попыток нет.

22. Один человек проводит n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Второй — тоже n испытаний Бернулли (независимо от первого), но с вероятностью успеха p_0 . “Угадывание” в i -м испытании — это совпадение результатов i -х испытаний у первого и второго человека. Как нужно выбрать p_0 , чтобы была максимальной вероятность ровно одного угадывания? Хотя бы одного угадывания?
23. Книга состоит из 15 страниц, на каждой странице 1000 знаков. В каждом их знаков может быть допущена опечатка с вероятностью $p = 0.01$ независимо от других опечаток. Найти вероятность того, что в книге найдется страница с пятью или более опечатками.
24. Найти вероятность того, что в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p успехи и неудачи будут чередоваться.
25. Найти вероятность того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p успех номер m наступит раньше, чем неудача номер n .
26. n раз бросают игральную кость и параллельно n раз проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность того, что успехов больше, чем единиц.
27. (Мультиномиальные испытания). Пусть у нас имеется k -гранный многогранник, с гранями, пронумерованными числами $1, \dots, k$. При подбрасывании этот многогранник ложится на грань с номером i с вероятностью $p_i > 0$, причем $p_1 + \dots + p_k = 1$. Подбрасываем многогранник n раз. Если многогранник при подбрасывании лег на грань номер i , то мы будем говорить, что выпала i -я грань.
- Найти вероятность того, что первая грань выпадет m_1 раз, вторая — m_2 раз, $\dots$, k -я — m_k раз. ($m_1 + \dots + m_k = n$).
 - Найти вероятность того, что а) первая грань выпадет m_1 раз ($0 \leq m_1 \leq n$); б) первая грань выпадет m_1 раз и вторая — m_2 раз ($0 \leq m_1 + m_2 \leq n$); в) первая грань выпадет m_1 раз при условии, что вторая — m_2 раз.
 - Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — номера граней, которые выпали при бросании в первый, второй, и так далее в n -й раз (то есть X_1 есть номер грани, на которую упала пирамидка в первый раз и т.д.). Обозначим $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$ и $Y_2 = \max(X_1, \dots, X_n)$ (скажем, $\max(2, 4, 4, 1, 2) = 4$). Найти вероятности: а) $\mathbb{P}(Y_2 < m)$; б) $\mathbb{P}(Y_1 < l)$; в) $\mathbb{P}(Y_1 < m, Y_2 < l)$; г) $\mathbb{P}(Y_2 = m)$; д) $\mathbb{P}(Y_1 = l)$; е) $\mathbb{P}(Y_1 = m, Y_2 = l)$.
 - Найти вероятности: а) $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$; б) $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = X_3 + X_4)$;
 - Найти вероятность того, что $X_{[k]} \leq j$.
28. Бросают игральную кость. Обозначим k выпавшее число. После этого из колоды в 52 карты вынимают $2k$ карт и раскладывают их в круг. Найти вероятность того, что в круге все тузы лежат напротив друг друга.
29. Из чисел $1, \dots, n$ последовательно выбирают 2 числа. Найти вероятность того, что второе число больше k , если известно, что первое меньше k .
30. Бросают 2 игральные кости. Обозначим k сумму выпавших граней. После этого из колоды в 52 карты достают k карт. Найти вероятность того, что а) среди этих k карт есть тузы; б) число тузов совпадает с числом шестерок.
31. Четырехгранная пирамида с гранями, занумерованными числами $1, 2, 3, 4$ падает на грань i с вероятностью p_i . Пирамида подбрасывается n раз, а потом еще n раз. Найти вероятность того, что всех единиц больше, чем троек во второй серии.

32. Случайным образом выбираем число из ряда чисел $1, \dots, n$. Обозначим результат m . После этого m раз проводим Испытания Бернулли с вероятностью успеха p . Обозначим число успехов k . После этого из чисел $0, \dots, k$ выберем одно. Найти вероятность того, что оно равно l .
33. Из чисел $1, 2, \dots, n$ наугад выбирают одно число, обозначим это число k_1 . Затем из чисел $1, 2, \dots, k_1$ снова выбирают одно число (обозначим его k_2). Найти следующие вероятности: а) $\mathbb{P}(k_2 = m)$; б) $\mathbb{P}(k_1 + k_2 = l)$; в) $\mathbb{P}(k_2 = m \mid k_1 \geq i)$. Здесь $1 \leq m, i \leq n$ и $2 \leq l \leq 2n$.
34. Проводят n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . После этого проводят $k + 1$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p_1 , где k — число успехов в первой серии. Найти вероятность того, что во второй серии число успехов равно числу неудач.
35. $n + 1$ различных шар раскладывается по n большим различным ящикам. Найти вероятность того, что будет хотя бы один пустой ящик, если известно, что первые два шара попали в разные ящики.
36. Из колоды в 52 карты достают 13 карт. Пусть k — число королей среди этих карт. После этого проводят $k + 1$ испытание Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность того, что успехов столько же, сколько тузов.
37. Доказать из вероятностных соображений, что

$$\sum_{m=k}^{\infty} C_m^k 2^{-k} = 1.$$

38. Рассмотрим множество кусочно-линейных функций f вида $f(0) = 0$, $f(x) = f(i) + \alpha_i(x - i)$ при $i \leq x \leq i + 1$, $0 \leq i \leq n - 1$ и $\alpha_i = \pm 1$. Случайным образом выбирают одну такую функцию. Найти
- вероятность того, что $f(n) = n$;
 - вероятность того, что f имеет i корней на отрезке $(0, n]$;
 - вероятность того, что $\int_0^n f(x) dx = 0$;
 - условную вероятность того, что f не имеет корней на отрезке $(0, n)$ при условии, что $f(n) = 0$;
 - условную вероятность того, что минимальный корень f равен i при условии, что $f(n) = 0$.
39. На шахматную доску ставят двух королей — белого и черного. Найти вероятность того, что они бьют друг друга.
40. Для каких событий A и B верны следующие равенства: а) $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A^C \mid B) = 1$; б) $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B^C) = 1$; в) $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B \mid A) = 1$?
41. В ящике находится a белых и b черных шаров. Из ящика последовательно вынимают n шаров ($n \leq \min(a, b)$). Найти вероятность того, что цвета этих шаров чередуются.
42. Придумайте и выведите аналог формулы полной вероятности для того случая, когда эксперимент имеет не два этапа, а три. Придумайте соответствующий пример и решите его.
43. Каждая костяшка супердомино помечена числами от 1 до n (в обычном домино костяшки помечены числами от 0 (“пусто”) до 6). Последовательно достают две костяшки. Найти вероятность того, что вторую костяшку можно приставить к первой.

44. В каждом из трех ящичков находится по a белых и b черных шаров. Вытаскивают один шар из первого ящика и перекладывают его во второй, после этого достают один шар из второго ящика и перекладывают его в третий. Наконец, достают один шар из третьего ящика. Найти вероятность того, что этот третий шар — белый.
45. Решите предыдущую задачу, если первые два раза перекладывают по два шара.
46. В одном ящике лежит a_1 белых и b_1 черных шаров, в другом — a_2 белых и b_2 черных. Вынимают один шар из первого ящика, один шар из второго ящика и меняют их местами. После этого из каждого ящика вынимают по шару. Найти вероятность того, что они оба белые.
47. В первом ящике находится 5 белых и 4 черных шара, во втором — 2 белых и 3 черных шара, в третьем — 7 белых и 3 черных. Выбирают два ящика, из них вытаскивают по одному шару. Найти вероятность того, что они разного цвета.
48. $N + 1$ ящичков занумерованы числами от нуля до N . В ящике номер k лежит k белых и $N - k$ черных шаров. Случайным образом выбирают ящик, вынимают из него шар, кладут шар обратно, снова вынимают шар из этого ящика и так далее n раз. Известно, что все n вынутых шаров — черные. Чему равна вероятность того, что еще один шар, вынутый из того же ящика, будет черный?
49. Из колоды в 52 карты вынули 4 карты. Найти вероятность того, что среди них присутствуют карты всех мастей, если известно, что там есть хотя бы одна трефа.
50. Из колоды в 52 карты вынут бубновый валет. Из оставшихся карт игроку выдается 5 карт. Найти вероятность того, что игрок может “побить” этого валета, если известно, что у него есть по крайней мере один туз.
51. Пять раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что шестерка выпадет ровно три раза, если известно, что ровно один раз выпала единица.
52. n раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что выпадет k_1 единиц, k_2 двоек, k_3 троек, k_4 четверок и k_5 пятерок, если известно, что выпало k_6 шестерок ($k_1 + \dots + k_6 = n$).
53. В n больших различных ящичков кладут три различных шара, а потом в ящики, оставшиеся свободными — еще три различных шара. Найти вероятность того, что первый ящик останется пустым.
54. Из колоды в 52 карты достают 5 карт. Потом из этих пяти карт убирают все пики и из оставшихся карт достают одну карту. Найти вероятность того, что эта карта — туз.
55. Хорошо известно, что в Швейцарии 51% мужчин и 49% женщин (это соотношение удерживается на протяжении многих лет благодаря тому, что со времен Наполеона страна не знала войн). С другой стороны, известно, что 5% мужчин и 0.25% женщин — дальтоники. Чему равна вероятность того, что некоторый наугад выбранный швейцарский дальтоник является мужчиной? Формализуйте задачу и лишь потом ищите ответ.
56. Колода 52 карты раскладывается в ряд. Обозначим k место первого туза в этом ряду. После этого из другой колоды 52 карты выбирают k карт. Найти вероятность того, что среди них есть по крайней мере 1 туз.
57. Из колоды в 52 карты достают 5 карт. Найти вероятность того, что среди них есть карты всех мастей, если известно, что там есть пики и трефы.

58. Проводят n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . При каждой неудаче проводят еще одно испытание Бернулли с той же вероятностью. Найти вероятность того, что общее число успехов равно k .
59. Грани правильной четырехгранной пирамиды занумерованы числами 1, 2, 3, 4. Пирамида подбрасывается n раз. Найти вероятность того, что пирамида упадет большее число раз на грань, помеченную единицей, чем на “четную” грань.
60. Два игрока бросают по n игральных костей каждый. Найти вероятность того, что
а) у первого шестерок выпало больше, чем у второго — нечетных цифр;
б) порядковый номер первой выпавшей единицы у первого игрока больше, чем число шестерок у второго (если у первого игрока единица вообще не выпала, то будем считать, что ее порядковый номер равен $n + 1$).
61. n раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что при первом бросании выпадет больше очков, чем при каждом из остальных.
62. Бросают игральную кость, а потом столько раз бросают правильную монету, сколько очков выпало на кости. Найти вероятность того, что а) число выпавших решек равно двум, б) число выпавших решек плюс число выпавших очков равно семи.
63. 10 раз бросают игральную кость. Потом бросают правильную монету столько раз, сколько выпало шестерок. Найти вероятность того, что гербов выпало столько же, сколько единиц.
64. Испытания Бернулли с вероятностью успеха p проводятся до k -го успеха, а потом — до m -й неудачи. Найти вероятность того, что общее число успехов равно общему числу неудач.
65. Производятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p до тех пор, пока в серии не будут и успехи, и неудачи (это — первая серия испытаний Бернулли). После этого с вероятностью успеха k/n , где k — число успехов, а n — число испытаний в первой серии, проводят еще n испытаний Бернулли (вторая серия). Найти вероятность того, что во второй серии успехов будет больше, чем в первой.
66. Сначала подбрасывают правильную монету до выпадения первого герба. Обозначим n номер подбрасывания, на котором осуществилось это событие. Затем снова подбрасывают ту же монету $2n$ раз. Найти вероятность того, что во второй серии бросаний герб выпал ровно k раз.
67. Проводят n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . После этого проводят еще $k + 1$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p_1 , где k — число успехов в первой серии, а p_1 — некоторая (заранее известная) вероятность. Найти вероятность того, что общее число успехов в обеих сериях вместе равно l .
68. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p до первой неудачи, затем p меняется на p_1 , и снова проводят испытания Бернулли до первой неудачи. Найти вероятность того, что общее число испытаний равно l .
69. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p до k -го успеха. После этого проводят еще k испытаний Бернулли с той же вероятностью успеха. Найти вероятность того, что а) общее число неудач равно l ; общее число успехов больше общего числа неудач.
70. Проводятся m серий по n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность того, что максимальное число успехов в этих сериях не больше, чем k .

71. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p до второй неудачи, а после этого — до третьей неудачи. Найти вероятность того, что общее число успехов равно l .
72. Проводят n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . После этого в n больших различных ящиков раскладывают столько маленьких различных шаров, сколько было успехов в испытаниях Бернулли. Найти вероятность того, что в первом ящике окажется 2 шара, а во втором — один.
73. Найти вероятность того, что при n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p сочетание $УН$ встретится ровно один раз.
74. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p до второго успеха. Обозначим k получившее число неудач. После этого $k+1$ раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что число выпавших единиц равно номеру испытания, на котором выпал первый успех.
75. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p до второго успеха. Обозначим k получившее число неудач. После этого $k+1$ раз проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p_1 . Найти вероятность того, что общее число неудач равно m .
76. n раз проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p . Обозначим k номер испытания, на котором появился первый успех (если успеха не было, то $k = n + 1$). После этого k раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что число неудач плюс число выпавших единиц равно m .
77. Три игрока бросают по кривой монете с вероятностями выпадения герба p_1 , p_2 и p_3 соответственно. Выигрывает тот, у кого результат отличается от двух других. В случае совпадения результатов игроки бросают монеты еще раз и так далее. Найти вероятности выигрыша игроков.
78. Найти вероятность того, что при проведении $2n$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p символов $УН$, где успех стоит на нечетном месте, будет ровно l .
79. n раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что четных цифр выпадет столько же, сколько единиц и шестерок вместе.
80. Два игрока бросают по n игральных костей каждый. Найти вероятность того, что у первого максимум из выпавших очков больше, чем минимум у второго.
81. Проводят испытания Бернулли с вероятностью успеха p до тех пор, пока в серии не будут и успехи, и неудачи. После этого проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p_1 снова до тех пор, пока в серии не будут и успехи, и неудачи. Найти вероятность того, что общее число успехов равно l .
82. Проводят n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Если успехов четное число, то проводят еще одно испытание Бернулли с той же вероятностью успеха, а если нечетное — то два таких же испытания. Найти вероятность того, что общее число успехов равно l .
83. С вероятностью $1/2$ производят одно из 2-х испытаний Бернулли B_1 (вероятность успеха p_1) или B_2 (вероятность успеха p_2). Так повторяется n раз. Найти вероятность того, что общее число успехов равно k .
84. С вероятностью $1/2$ производят одно из 2-х испытаний Бернулли B_1 (вероятность успеха p_1) или B_2 (вероятность успеха p_2). Так повторяется n раз. Найти вероятность того, что успехов в испытаниях Бернулли B_1 столько же, сколько в испытаниях B_2 .

85. Производятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p до тех пор, пока в серии не будут и успехи, и неудачи (это — первая серия испытаний Бернулли). После этого с вероятностью успеха k/n , где k — число успехов, а n — число испытаний в первой серии, проводят еще n испытаний Бернулли (вторая серия). Найти вероятность того, что число успехов во второй серии испытаний равно l .
86. n раз бросают игральную кость. Найти вероятность того, что а) троек и шестерок (вместе) выпадет столько же, сколько двоек и четверок (тоже вместе).
87. Проводят две независимые серии по n испытаний Бернулли с вероятностями успеха p_1 и p_2 соответственно. Найти вероятность того, что во второй серии успехов будет больше, чем в первой.
88. В автобусе едет n человек, каждый из которых может выйти на ближайшей остановке с вероятностью p_0 . На остановке стоит l человек, каждый из которых с вероятностью p может войти в автобус. Найти вероятность того, что после остановки число пассажиров в автобусе будет равно k . Все пассажиры действуют независимо.
89. Проводят n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . После этого проводят еще n испытаний Бернулли с вероятностью успеха k/n , где k — число успехов в первой серии. Найти вероятность того, что во второй серии успехов будет больше, чем в первой.