

Метод 2D-SSA для анализа двумерных полей

Усевич Константин Дмитриевич, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Голяндина Н.Э.
Рецензент: к.ф.-м.н. Некруткин В.В.



Санкт-Петербург
2007г.

Анализ двумерных дискретных полей

- **двумерное поле** – функция двух переменных $f(x, y)$
- **дискретное** – функция задана на дискретной равномерной сетке

Задача: разложить поле $f(x, y)$ на составляющие в соответствии с внутренней структурой.

Методы SSA (SSA, MSSA, 2D-SSA):

- Функция $f : D \mapsto \mathbb{R}$, D – дискретное пространство
- Параметры $\mathfrak{T}$ – размеры окна.

1 Разложение

- Вложение $f \rightsquigarrow \mathbf{W}$ (инъекция)
- Сингулярное разложение

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$$

$$\text{SSA, ряд } (f_0, \dots, f_{N-1})$$
$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & \dots & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & \dots & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$

2 Восстановление

- Группировка $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{I_1} + \dots + \mathbf{W}_{I_m}$, где $\mathbf{W}_I = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$
- Ортогональное проектирование $\mathbf{W}_I \dashrightarrow f_I$
 $f = f_{I_1} + \dots + f_{I_m}$

Непрерывный случай

- Методы SSA на функциональном языке
- Непрерывный 2D-SSA
- Результаты для абстрактного и непрерывного случая

Дискретный случай

- Алгоритм
- Разделимость
- Поля конечного ранга
- Отделение от шума – результаты моделирования
- Программа, пример
- Приложения 2D-SSA

SSA-методы на функциональном языке

Рассматривается разложение измеримой функции $f : (D, \mathcal{U}) \mapsto \mathbb{R}$.

- Измеримые пр-ва $(D_1, \mathcal{U}_1, \mu_1)$, $(D_2, \mathcal{U}_2, \mu_2)$; μ_1 , μ_2 – конечные меры.
- Пространства функций

$$\mathbf{L}_1^2 = \mathbf{L}^2(D_1, d\mu_1), \mathbf{L}_2^2 = \mathbf{L}^2(D_2, d\mu_2), \mathbf{L}_{1,2}^2 = \mathbf{L}^2(D_1 \times D_2, d(\mu_1 \otimes \mu_2)),$$

- Измеримая сюръекция $\theta : D_1 \times D_2 \mapsto D$.
- θ порождает меру ν на $(D, \mathcal{U})$ и σ -алгебру $\mathcal{U}_\theta$ на $D_1 \times D_2$:

$$\nu(A) = \mu_1 \otimes \mu_2(\theta^{-1}A), \quad A \in \mathcal{U}; \quad \mathcal{U}_\theta = \{\theta^{-1}(A), A \in \mathcal{U}\}.$$

- Для $f \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$ существует разложение Шмидта $g = f \circ \theta \in \mathbf{L}_{1,2}^2$

$$g(u, s) = f(\theta(u, s)) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(u) \varphi_n(s), \quad \psi_n \in \mathbf{L}_1^2, \varphi_n \in \mathbf{L}_2^2,$$

- Ортогональные проекции $\mathfrak{P}_\theta : \mathbf{L}_{1,2}^2 \mapsto \mathbf{L}^2(D_1 \times D_2, \mathcal{U}_\theta, d(\mu_1 \otimes \mu_2|_{\mathcal{U}_\theta}))$

$$f_n \circ \theta = \mathfrak{P}_\theta(\sqrt{\lambda_n} \psi_n \otimes \varphi_n).$$

- Переход к разложению $f = \sum_n f_n$

Непрерывный 2D-SSA

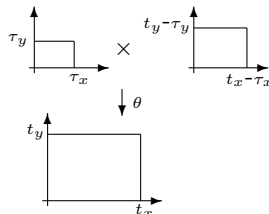
Разложение функции $f : [0, t_x) \times [0, t_y) \mapsto \mathbb{R}$.

- Параметры: **размеры окна** (τ_x, τ_y)

$$D_1 = [0, \tau_x) \times [0, \tau_y),$$

$$D_2 = [0, t_x - \tau_x) \times [0, t_y - \tau_y).$$

- $\theta((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = (u_x + s_x, u_y + s_y)$.



- Меры μ_1, μ_2 – меры Лебега (равномерные распределения).
- Мера $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2 \circ \theta^{-1}$ – сумма равномерных распределений.

Алгоритм:

1 Этап разложения

- Вложение $g((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = f(u_x + s_x, u_y + s_y)$
- Разложение Ш. $g((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(u_x, u_y) \varphi_n(s_x, s_y)$

2 Этап восстановления

- Группировка $g = g_{I_1} + \dots + g_{I_m}$, где $g_I = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} \psi_i \otimes \varphi_i$
- Проектирование $f = f_{I_1} + \dots + f_{I_m}$, где $f_I = \Re_{\theta}(g_I)$

Результаты для непрерывного (абстрактного) случая

Разложение Шмидта

$$f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(u_x, u_y) \varphi_n(s_x, s_y)$$

- Сформулировано понятие разделимости, выведены условия разделимости в непрерывном случае.
- Для функций вида $f(x, y) = p(x)q(y)$:
 - Вид разложения через разложение одномерных функций
 - Условие разделимости $f_1(x, y) = p_1(x)q_1(y)$ и $f_2(x, y) = p_2(x)q_2(y)$
- Введено понятие поля конечного ранга (с конечным числом слагаемых в разложении). Доказаны утверждения для вычисления ранга, в т.ч. для конкретных полей: полиномов.
- Доказана инвариантность в смысле сохранения ранга относительно линейных преобразований
 - одномерных функций $p(ax + by)$
 - полей $f(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$

Алгоритм дискретного 2D-SSA, Этап 1: разложение

Разложение дискретных двумерных полей

- Поле F размера $N_x \times N_y$

$$F = \begin{pmatrix} f_{0,0} & \dots & f_{0,N_y-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N_x-1,0} & \dots & f_{N_x-1,N_y-1} \end{pmatrix}$$

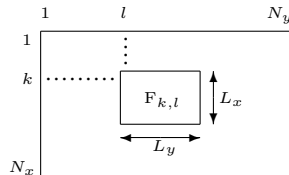
- Параметры: **размеры окна** (L_x, L_y)

Из подматриц $L_x \times L_y$ строится матрица $\mathbf{X}$

$$F_{k,l} = \begin{pmatrix} f_{k-1,l-1} & \dots & f_{k-1,l+L_y-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k+L_x-2,l-1} & \dots & f_{k+L_x-2,l+L_y-2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{1,K_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{K_x,1} & \dots & F_{K_x,K_y} \end{pmatrix}$$

Разложение $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^m Q_i \otimes P_i, \\ P_i \in \mathcal{M}_{L_x, L_y}, Q_i \in \mathcal{M}_{K_x, K_y}$$



Кронекеровское произведение

$$A \otimes B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Алгоритм дискретного 2D-SSA, Этап 1: разложение

Двумерная траекторная матрица $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & \dots & F_{1,K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{K_x,1} & F_{K_x,2} & \dots & F_{K_x,K_y} \end{pmatrix}$$

Векторизация

$$\text{vec} \begin{pmatrix} \blacktriangle & \blacksquare & \dots & * \\ \blacktriangle & \blacksquare & \dots & * \\ \blacktriangle & \blacksquare & \dots & * \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \\ = (\blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \blacksquare \blacksquare \blacksquare \dots * * *)^T$$

Матрица $\mathbf{W}$ из векторизованных подматриц $W_{k+(l-1)L_x} = \text{vec}(F_{k,l})$ Блочно-ганкелева траекторная матрица $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{H}_{K_y-1} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \dots & \mathbf{H}_{K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{L_y-1} & \mathbf{H}_{L_y} & \dots & \mathbf{H}_{N_y-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_j - \text{ганкелевы блоки } L_x \times K_x, \\ \mathbf{H}_j = \begin{pmatrix} \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

 $\mathbf{H}_j$ – траекторные матрицы рядов $f(\cdot, j)$.

Разложение

$$\text{KP-SVD} \quad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \Phi_i \otimes \Psi_i,$$

$$\text{SVD} \quad \mathbf{W} = \sum_{i=1}^d \mathbf{W}_i = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

собственные

факторные

$$U_i = \text{vec } \Psi_i \quad V_i = \text{vec } \Phi_i$$

Разделимость

Поле является суммой $F = F^{(1)} + F^{(2)}$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \Phi_i \otimes \Psi_i \stackrel{?}{=} \overbrace{\sum_{i \in I_1} \sqrt{\lambda_i} \Phi_i \otimes \Psi_i}^{F^{(1)}} + \overbrace{\sum_{i \in I_2} \sqrt{\lambda_i} \Phi_i \otimes \Psi_i}^{F^{(2)}}$$

Определение

Траекторное пространство $\mathcal{L}^{(L_x, L_y)}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\{F_{k,l}\}_{k,l=1}^{K_x, K_y})$.

Поля $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ *слабо разделимы окном* (L_x, L_y) , если $\mathcal{L}^{(L_x, L_y, 1)} \perp \mathcal{L}^{(L_x, L_y, 2)}$ и $\mathcal{L}^{(K_x, K_y, 1)} \perp \mathcal{L}^{(K_x, K_y, 2)}$.

Свойства

- $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, $F^{(1)}$ и $F^{(3)}$ – разделимы $\Rightarrow F^{(1)}$ и $F^{(2)} + F^{(3)}$ – разделимы
- Разделимость $F^{(1)} = P_1 Q_1^T$ и $F^{(2)} = P_2 Q_2^T$

Пример $f(i, j) = \ln(i+1) \sin(aj) + \sin(bi) \ln(j+1)$ отделимо от константы

Поля конечного ранга

Определение

(L_x, L_y) -Ранг поля: $\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}^{(L_x, L_y)} = d$.

- Произведение рядов ($f(i, j) = p(i)q(j)$)

$$\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y^T) = \text{rank}_{L_x}(\mathbf{F}_x) \text{rank}_{L_y}(\mathbf{F}_y)$$

- Полиномы

$$P_m(i, j) = \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n a_{nk} i^k j^{n-k}$$

$$m+1 \leq \text{rank}_{L_x, L_y} P_m \leq \begin{cases} \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right) \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right), & \text{для четных } m, \\ \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right) \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2\right), & \text{для нечетных } m. \end{cases}$$

- Тригонометрические функции

$$h_d(i, j) = \sum_{m=1}^d \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_m^{(X)} i) & \sin(2\pi\omega_m^{(X)} i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_m^{(Y)} j) \\ \sin(2\pi\omega_m^{(Y)} j) \end{pmatrix}$$

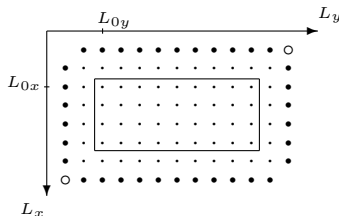
Поля конечного ранга

Определение

Будем говорить, что F – поле конечного ранга, если $\exists d, L_{x0}, L_{y0}$:

$$1 \leq L_{x0} < \lfloor N_x/2 \rfloor, 1 \leq L_{y0} < \lfloor N_y/2 \rfloor, 1 \leq d \leq L_{x0} \cdot L_{y0},$$

и для любых (L_x, L_y) , т.ч. $L_{x0} \leq \min(L_x, K_x)$, $L_{y0} \leq \min(L_y, K_y)$, имеет место равенство $\text{rank}_{L_x, L_y}(F) = d$.



- Конечный ранг
 $\text{rank}_{L_x, L_y}(F) \equiv d$
- Неполный ранг
 $\text{rank}_{L_x, L_y}(F) < \min(L_x L_y, K_x K_y)$

Неполный ранг $\nRightarrow$ Конечный ранг

Пример

Ранг поля $f(i, j) = \ln(i+1) \sin(aj)$ равен $\min(L_x, K_x) \cdot 2$

Моделирование, отделение полей от шума

Сравнивались следующие методы (частные случаи 2D-SSA)

- SVD – размеры окна $(N_x, 1)$ или $(1, N_y)$

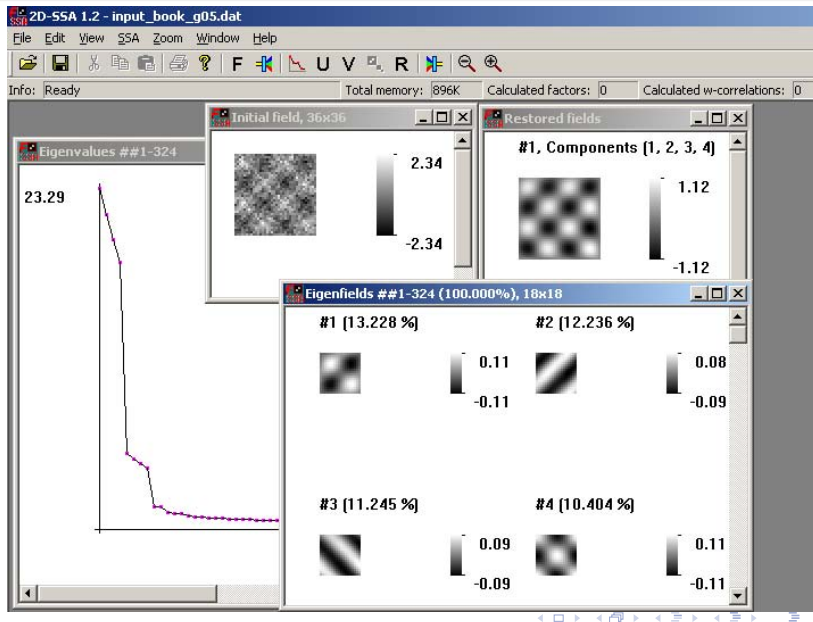
$$F = \mathbf{W} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$$

- MSSA – размеры окна $(L_x, 1)$ (MSSA-X) и $(1, L_y)$ (MSSA-Y)
- 2D-SSA – общий случай
- 2D-SSA – эквивалентный SVD, размеры окна (L_0, L_0)

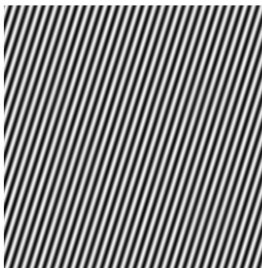
Результаты для полей

- конечного ранга
 - Восстанавливать лучше по рангу
 - 2D-SSA $(\lfloor N_x/2 \rfloor, \lfloor N_y/2 \rfloor)$ – 2D-SSA (L_0, L_0) – MSSA
 - Если ранг у методов одинаковый, то 2D-SSA (L_0, L_0) лучше SVD
- неполного ранга
 - SVD иногда лучше 2D-SSA (в случае $f(i, j) = \sum_k p_k(i) q_k(j)$).
 - 2D-SSA (L_0, L_0) лучше 2D-SSA $(\lfloor N_x/2 \rfloor, \lfloor N_y/2 \rfloor)$
- произвольных изображений

Программа



Пример: удаление периодического шума



Пример: удаление периодического шума

