

Несколько задач про волновые числа

В.В. Некруткин

Несмотря на абстрактную формулировку, предлагаемые задачи относятся как к методу Монте-Карло (теория так называемых генераторов псевдослучайных чисел), так и к алгебре — точнее, к плотности решетчатых упаковок шаров в многомерных пространствах. Некоторые из этих задач достаточно простые, другие — не очень, есть и открытая проблема.

Пусть есть последовательность целых чисел $p \rightarrow +\infty$, причем p делится на 12. Положим

$$\lambda = \lambda(p) = 2^{p/2} + 2^{p/3} + 2^{p/4} + 1$$

и

$$w_\lambda^{(d)} = \min \left\{ \|\bar{\ell}\|_2 : \bar{\ell} \neq \mathbf{0} \text{ и } \sum_{j=0}^{d-1} \ell_j \lambda^j = 0 \pmod{2^p} \right\},$$

где $\bar{\ell} = (\ell_0, \dots, \ell_{d-1})^T$ — d -мерный вектор с целочисленными (не обязательно положительными) координатами и $\|\bar{\ell}\|_2^2 = \sum_{j=0}^{d-1} \ell_j^2$ — квадрат длины этого вектора.

Число $w_\lambda^{(d)}$ иногда называют волновым числом. Нас интересует асимптотическое поведение $w_\lambda^{(d)}$ при $p \rightarrow \infty$ для разных d .

Известно, что

$$w_\lambda^{(d)} \leq C_d 2^{p/d}, \quad (1)$$

где (положительная) постоянная C_d зависит только от d .

Общая задача состоит в доказательстве того, что $w_\lambda^{(d)} \asymp 2^{p/d}$ при $p \rightarrow \infty$ и $d = 2, 3, 4$.¹ Кроме того, интересно, что происходит с $w_\lambda^{(d)}$ при $p \rightarrow \infty$ и $d > 4$.

Что по этому поводу известно.

1. Доказать, что $w_\lambda^{(d)} \asymp 2^{p/d}$ при $d = 2$. Это, видимо, самая проста задача.
2. Выяснить, что происходит с $w_\lambda^{(d)}$ при $d > 4$ и $p \rightarrow \infty$? Это тоже не сложно.
3. Доказать, что $w_\lambda^{(d)} \asymp 2^{p/d}$ при $d = 4$. Доказательство известно, но оно довольно громоздко. Может, у Вас получится проще.
4. Есть уверенность, что $w_\lambda^{(d)} \asymp 2^{p/d}$ при $d = 3$, но, судя по всему, это еще не доказано. Почему бы не попробовать?

Замечание 1. 1. Каждая из перечисленных 4-х задач (независимо от ее сложности) имеет продолжение, которое, как планируется, должно благополучно кончиться зачетом. Что касается последней задачи, то ее решение может служить началом некой научной деятельности, посвященной теории мультипликативных генераторов псевдослучайных чисел.

2. Некоторые ответвления предложенных задач.

- Доказательство неравенства (1) связано с классической теорией решетчатых упаковок шаров в многомерных пространствах. Можно изучить элементы этой теории, из предварительных знаний требуется только владением результатами линейной алгебры. Если будут желающие, поговорим о литературе и пр.
- Есть довольно хитрые алгоритмы и программы, позволяющие вычислять волновые числа и другие аналогичные им вещи. Об этом можно прочитать, например, во втором томе книги Дональда Кнута “Искусство программирования для ЭВМ”. Ну, а если есть программа, то открывается простор для численных экспериментов.

¹По определению, $a_n \asymp b_n$, если $0 < c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2 < \infty$ для некоторых постоянных c_1, c_2 .