

Выбор критической области на основе мощности

Общие понятия

Пусть есть две гипотезы, нулевая (основная) H_0 и альтернативная гипотеза H_1 , а также есть статистика критерия t . Эта статистика критерия t имеет одно распределение F_0 , если верна H_0 , и другое F_1 , если верна H_1 . Ошибка I рода соответствует попаданию в критическую область, если верна H_0 , а ошибка II рода — попадание в доверительную область, если верна H_1 .

Критерий строится так, чтобы вероятность ошибки первого рода α_I была равна выбранному уровню значимости α (это вероятность попасть в критическую область для случайной величины (статистики критерия) с распределением F_0 равна α), а вероятность ошибки второго рода α_{II} — как получится. Чтобы ее сосчитать, надо сосчитать вероятность для случайной величины (статистики критерия) с распределением F_1 попасть в доверительную область.

Для одних и тех же основной и альтернативной гипотез критерии сравниваются по мощности, так как ошибки первого рода у них одинаковые, по построению. (Мощность = $1 - \alpha_{II}$). У кого мощность больше, тот лучше.

Пример

Основная гипотеза $H_0 : E\xi = a_0$; нормальная модель с известной дисперсией σ , т.е. $\xi \sim N(a, \sigma)$ и σ — известное число, a неизвестно; выборка $(x_1, \dots, x_n)$; статистика критерия

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - a_0)}{\sigma}; \quad t \sim N(0, 1), \text{ если верна } H_0.$$

Пусть $H_1 : E\xi = a_1$, причем $a_1 > a_0$. Тогда, при верной H_1 выполнено $E\bar{x} = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n E x_i = a_1$ и поэтому

$$Et = \frac{\sqrt{n}(a_1 - a_0)}{\sigma} \implies t \sim N\left(\frac{\sqrt{n}(a_1 - a_0)}{\sigma}, 1\right) \text{ при верной } H_1.$$

(дисперсия, конечно, не меняется при сдвиге).

Следующий рисунок соответствует разбиению на доверительную и критическую область без учета альтернативы. Поэтому критическая область двухсторонняя.

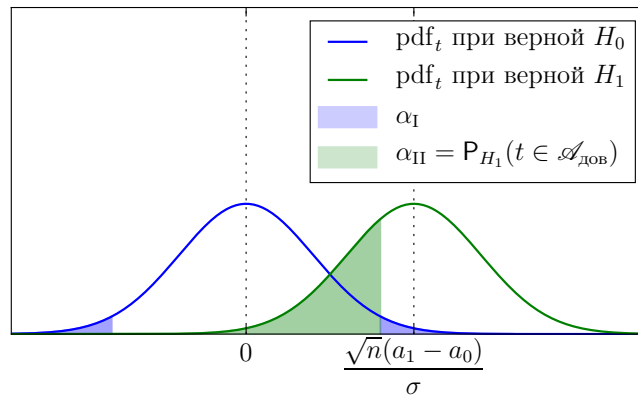


Рис. 0.1: Плотности распределения t (неоптимальное разбиение)

Чтобы минимизировать α_{II} , логично определить $\mathcal{A}_{\text{крит}}$ только на одном хвосте — с той стороны, где находится альтернатива.

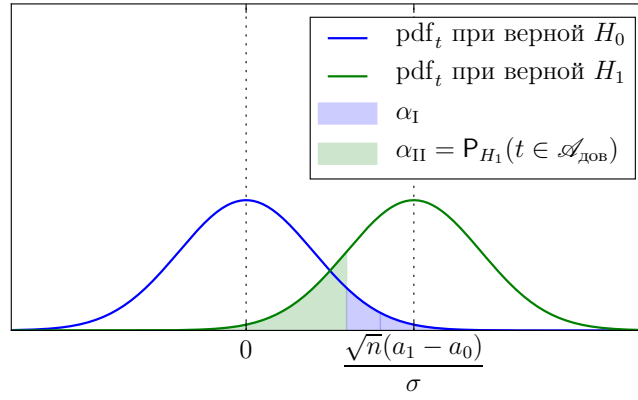


Рис. 0.2: Плотности распределения t (оптимальное разбиение)

Таким образом, в случае, когда известно, что альтернатива лежит справа, выбираем $\mathcal{A}_{\text{крит}} = (C, +\infty)$, $C = z_{1-\alpha}$. Разумеется, если $a_1 < a_0$, то $\mathcal{A}_{\text{крит}} = (-\infty, C)$, $C = z_\alpha$.

Таким образом, мы увидели, что если известна альтернатива, то можно выбирать критерий (= разбиение на доверительную и критическую области; статистика критерия — лишь удобной средство для этого), более мощный против именно этой альтернативы. И вообще, разные критерии для одной и той же основной гипотезы сравниваются по мощности против интересующей нас альтернативы.

Помимо этого, по рисунку видно, что ошибка второго рода α_{II} уменьшается при (1) увеличении ошибки первого рода (уровня значимости α) (поэтому мы ее выбираем максимальной из всех допустимых); (2) увеличении объема выборки (если α_{II} стремится к нулю при увеличении объема выборки, то критерий называется состоятельным после данной альтернативы) и (3) увеличении разницы между H_0 и H_1 (вообще, мощность критерия против некоторой альтернативы (чего-то отличного от основной гипотезы) говорит нам о том, насколько хорошо критерий обнаруживает это отличие).