

Базовая статистика

1. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — выборка. Напишите формулы для выборочного среднего и выборочной дисперсии.
2. Пусть задана случайная величина ξ и $(x_1, \dots, x_n)$ — выборка из ее распределения. Чему равны $\mathbb{E}\bar{x}$ и $\mathbb{D}\bar{x}$ и почему?
3. Найдите ОМП параметра λ экспоненциального распределения и пуассоновского распределения.
4. Пусть распределение с.в. ξ симметрично. Что лучше выбрать в качестве оценки математического ожидания, выборочное среднее или выборочную медиану?
5. Пусть ξ имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$. Напишите, как выглядят доверительные интервалы для a с уровнем доверия γ .
6. Надо проверить гипотезу $H_0 : \mathbb{E}\xi = 1$. Известно, что ξ имеет нормальное распределение с дисперсией 4. Есть выборка объема 100, выборочное среднее равно $\bar{x} = 1.4$. (1) При каких уровнях значимости гипотеза отвергается, как это получить? (2) Пусть уровень значимости равен 0.05. Можно ли что-то сказать, отвергалась бы или нет гипотеза, если бы выборочное среднее было равно 1.1? 1.6?
(1) — нужно найти p -values, (2) — рассуждать ‘далеко-близко’ в терминах k сигм для статистики критерия.
7. Гипотеза $H_0 : \mathbb{E}\xi = 1$ проверяется с помощью t -критерия. Против какой из альтернатив этот критерий будет более мощным и почему: $H_1 : \mathbb{E}\xi = 0$ или $H_1 : \mathbb{E}\xi = 3$? Можно нарисовать картинки, сфотографировать и вставить в TEX.
8. В каком случае больше мощность критерия χ -квадрат, при уровне значимости (ошибке первого рода) 0.1 или 0.05 (нулевая и альтернативная гипотезы не меняются)?
9. Есть двумерные данные $(x_i, y_i)^T$, $i = 1, \dots, n$. Построим новый признак $z_i = y_i - x_i$, $i = 1, \dots, n$. Для каждого из трех признаков можно посчитать выборочную дисперсию (она же обычная дисперсия эмпирического распределения). Ниже приведен скаттерплот исходных данных. Что больше, s_z^2 или $s_x^2 + s_y^2$? Ответ на этот вопрос связан с ответом на вопрос, когда $\mathbb{D}(\eta - \xi)$ больше суммы дисперсий $\mathbb{D}\eta + \mathbb{D}\xi$ и когда меньше?

