

Линейная алгебра

1. Чему равны ранги матриц (обоснуйте): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$. Приведите какой-нибудь базис подпространства столбцов в каждом случае.
2. Какой знак у собственных чисел матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и почему? Проверьте, является ли вектор $(-1, 1)^T$ ее собственным вектором.
3. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^L$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{A} = P_1 Q_1^T$, $\mathbf{B} = P_2 Q_2^T$. Докажите, что если скалярное произведение (P_1, P_2) равно нулю, то $\mathbf{B}^T \mathbf{A}$ — нулевая матрица.
4. На каком значении a достигается минимум $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$? Докажите.

Мат.анализ

1. $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = ?$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$
3. Разложите в ряд Тейлора в точке 0 функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Как выглядит линейное приближение в этой точке с о-малое? Как с его помощью получить ответ на предыдущий пункт?

Теория вероятностей

1. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Чему равны ее математическое ожидание и дисперсия?
2. Пусть у случайной величины ξ мат.ож равно 1, дисперсия равна 2, а у случайной величины η мат.ож равно -1, дисперсия равна 3. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины $2\xi - \eta$, если они независимы?
3. Напишите, как выглядит плотность нормального распределения $N(a, \sigma^2)$.
4. Что больше, $\mathbb{E}\xi^2$ или $(\mathbb{E}\xi)^2$?
5. Что такое медиана, квантили, квартили? Пусть медиана ξ равна 3. Чему равна медиана ξ^3 ?