

Алгоритм Хольма/Холма (Holm algorithm, или Holm-Bonferroni algorithm):

1. Пусть $H_1, \dots, H_m$ — семейство нулевых гипотез и $p_1, \dots, p_m$ — соответствующие вероятностные уровни (p-values).
2. Отсортируем их по возрастанию: $p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(m)}$, соответствующие отсортированным уровням нулевые гипотезы переобозначим как $H_{(1)} \dots H_{(m)}$.
3. Для заданного уровня значимости α пусть k — минимальный индекс такой, что $p_{(k)} > \frac{\alpha}{m+1-k}$.
4. Отвергаем все нулевые гипотезы $H_{(1)} \dots H_{(k-1)}$ и не отвергаем $H_{(k)} \dots H_{(m)}$.
5. Если $k = 1$, то никакая нулевая гипотеза не отвергается, а если нет такого k , то все нулевые гипотезы отвергаются.

Proposition 1. При множественном тестировании с помощью алгоритма Хольма групповая ошибка (family-wise error rate) $FWER \leq \alpha$.

Доказательство. Обозначим I_0 множество индексов, соответствующих верным нулевым гипотезам (неизвестно, каким), $m_0 = |I_0|$ — число верных нулевых гипотез.

Пусть h — номер первой (имеем в виду порядок гипотез, введенный в алгоритме Хольма) отвергнутой нулевой гипотезы $H_{(h)}$ среди всех верных гипотез. Так как если одна гипотеза не отверглась, то и следующие гипотезы не отвергаются, то все предыдущие гипотезы $H_{(1)}, \dots, H_{(h-1)}$ тоже отвергались, но были неверными. Поэтому m_0 верных нулевых гипотез должны поместиться между h и m ; отсюда получаем $m_0 \leq m - h + 1$ и поэтому $\frac{1}{m-h+1} \leq \frac{1}{m_0}$.

По определению, $FWER_{I_0} = \Pr(\exists i \in I_0 : H_i \text{ отвергается})$. Так как события отвержения гипотез являются вложенными, т.е. не может отвергнуться гипотеза с большим номером (i), если не отверглась с меньшим, получаем $FWER_{I_0} = \Pr(H_{(h)} \text{ отверглась})$. ($\Pr(A) = \Pr(AB)$, если $B \subset A$.)

В силу неравенства для m_0 , $FWER_{I_0} = \Pr(p_{(h)} \leq \frac{\alpha}{m-h+1}) \leq \Pr(p_{(h)} \leq \frac{\alpha}{m_0})$.

Так как для h может быть не более m_0 вариантов, $\Pr(p_{(h)} \leq \frac{\alpha}{m_0}) \leq \Pr(p_i \leq \frac{\alpha}{m_0} \text{ for } i \in I_0) \leq \sum_{i \in I_0} \Pr(p_i \leq \frac{\alpha}{m_0}) = \alpha$.

Таким образом, $FWER_{I_0} \leq \alpha$ для любого I_0 . Поэтому $FWER \leq \alpha$. □