

Markov Chain Monte Carlo

Anton Korobeynikov
anton@korobeynikov.info

11 апреля 2021 г.

1. Промоделировать траекторию марковской цепи при помощи алгоритма Метрополиса-Гастингса с подходящим пробным распределением (proposal distribution).
2. Исследовать траекторию цепи на сходимость (выход на стационарность, автокорреляцию). При необходимости убрать burn-in интервал и провести прореживание.
3. Везде убедиться в том, что получена выборка именно из нужного распределения.

Задачи

1. Оценить интеграл из задания на метод Монте-Карло. Сравнить оценки и их дисперсии.
2. Рассмотрим задачу моделирования выборки из бета-распределения с параметрами 2.7 и 6.3. Промоделируйте выборку из этого распределения, используя набор распределений начиная с $B(1, 1)$ и заканчивая бета-распределением с малой дисперсией (напомним, что дисперсия $B(a, b)$ равна $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$). Изучите зависимость вероятности перехода в новое состояние в зависимости от величины дисперсии.
3. Рассмотрим задачу моделирования выборки из бета-распределения с параметрами 0.7 и 6.3. Промоделируйте выборку из этого распределения, используя набор распределений начиная с $B(1, 1)$ и заканчивая бета-распределением с малой дисперсией (напомним, что дисперсия $B(a, b)$ равна $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$). Изучите зависимость вероятности перехода в новое состояние в зависимости от величины дисперсии.
4. Рассмотрим задачу моделирования выборки из бета-распределения с параметрами 0.7 и 0.3. Промоделируйте выборку из этого распределения, используя набор распределений начиная с $B(1, 1)$ и заканчивая бета-распределением с малой дисперсией (напомним, что дисперсия $B(a, b)$ равна $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$). Изучите зависимость вероятности перехода в новое состояние в зависимости от величины дисперсии.
5. Рассмотрим задачу моделирования выборки из бета-распределения с параметрами 2.7 и 6.3, ограниченного на интервал (c, d) с $c, d \in (0, 1)$. Сравните результаты моделирования с пробным распределением $B(2, 6)$ с равномерным на отрезке (c, d) . Возьмите $c = 0.1, 0.25$ и $d = 0.9, 0.75$.
6. Рассмотрим задачу моделирования выборки из бета-распределения с параметрами 0.7 и 6.3, ограниченного на интервал (c, d) с $c, d \in (0, 1)$. Сравните результаты моделирования с пробным распределением $B(2, 6)$ с равномерным на отрезке (c, d) . Возьмите $c = 0.1, 0.25$ и $d = 0.9, 0.75$.
7. Рассмотрим задачу моделирования выборки из бета-распределения с параметрами 0.7 и 0.3, ограниченного на интервал (c, d) с $c, d \in (0, 1)$. Сравните результаты моделирования с пробным распределением $B(2, 6)$ с равномерным на отрезке (c, d) . Возьмите $c = 0.1, 0.25$ и $d = 0.9, 0.75$.
8. Вычислите среднее случайной величины с гамма-распределением с параметрами 4.3 и 6.2. с использованием выборки, полученной:

- (a) Методом отбора из $\Gamma(4, 7)$
- (b) Методом Метрополиса-Гастингса с пробной плотностью $\Gamma(4, 7)$
- (c) Методом Метрополиса-Гастингса с пробной плотностью $\Gamma(5, 6)$

Исследуйте сходимость оценки в зависимости от объема выборки.

9. Вычислите среднее случайной величины, имеющей распределение Стюдента с $\nu = 4$ степенями свободы с использованием выборки, полученных:

- (a) Методом Метрополиса-Гастингса с пробной плотностью $N(0, 1)$
- (b) Методом Метрополиса-Гастингса с пробной плотностью t_2
- (c) Методом Метрополиса-Гастингса с пробной плотностью t_{10}

Исследуйте сходимость оценки в зависимости от объема выборки.

10. Исходная работа Хастингса в 1970 г. была посвящена моделированию стандартного нормального распределения с использованием в качестве пробного распределения случайного блуждания с отдельными шагами, полученными из равномерного распределения на отрезке $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

- (a) Исследуйте свойства алгоритма Метрополиса-Гастингса и получаемой цепи при разных значениях δ (например, $\delta = 0.1, 1, 10$ или другие). Какое значение δ будем оптимальным с точки зрения автокорреляции цепи?
- (b) Промоделируйте выборку из $N(0, 1)$ с использованием других распределений для приращений: Коши и Лапласа (с параметром $\lambda = 1$). Сравните свойства получаемой марковской цепи.
- (c) Для трех вышеобозначенных примеров случайного блуждания (с равномерными приращениями на интервале, из распределений Коши и Лапласа) исследуйте возможность получения вероятности перехода в следующее состояние цепи близкой к 0.25 за счет правильного подбора параметров.