

Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Anton Korobeynikov
anton@korobeynikov.info

21 февраля 2022 г.

Одномерные интегралы

- Убедиться, что интеграл сходится
- Реализовать процедуру интегрирования методом Монте-Карло для произвольной интегрирующей плотности. Убедиться в том, что процедура дает правильный результат
- Для случая конечных пределов проверить порядок сходимости процедуры Монте-Карло для равномерной интегрирующей плотности
- Подобрать несколько интегрирующих плотностей и выбрать из них оптимальную с точки зрения скорости сходимости и дисперсии оценки. Обосновать выбор

Варианты

1.

$$\int_0^1 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + e^{-x} \right) dx$$

2.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin (x + e^{-x}) dx$$

3.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin (x + e^{-x}) dx$$

4.

$$\int_0^1 \frac{\cos (x + x^2)}{x + \sqrt[3]{x}} dx$$

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\tan x} \cdot \sin (x + e^{-x}) dx$$

6.

$$\int_0^1 \frac{\sin (x + e^{-x})}{\sqrt{x}} dx$$

7.

$$\int_0^{\pi} e^{-\cos(x+\tan x)} dx$$

8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\tan x + \cos} e^{-x}} dx$$

9.

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sin \sqrt{x} + x^2} dx$$

10.

$$\int_0^1 \tan x \cdot \log x dx$$

11.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \cos^2 x} dx$$

12.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tan x} \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{1+x^3}} \right) dx$$

13.

$$\int_0^1 e^{\cos x} \log x dx$$

14.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x} - x^2}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

15.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\tan \frac{\pi}{8} \sqrt{x}}{1 - e^{x^2 - \sqrt{x}}} dx$$

16.

$$\int_0^e \frac{\cos x^\pi - e \log(1 + 20\sqrt{x})}{\sqrt[6]{x}} dx$$

17.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\sqrt[2]{x}} dx$$

18.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi \sqrt{x}} e^{-x} dx$$

19.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{x}} e^{-x^3} dx$$

20.

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2 \cos x (1-2x)^\pi}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

21.

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin \pi x}{1+x^e} dx$$

Многомерные интегралы

- Убедиться, что интеграл сходится
- Реализовать процедуру многомерного Монте-Карло интегрирования для произвольной линейно-ограниченной области с равномерной интегрирующей плотностью
- Вычислить интеграл методом Монте-Карло двумя способами: «в лоб» и через замену переменных области интегрирования к параллелепипеду («коробке»), или каким-либо иным «разумным» методом (например, за счет выбора зависимых случайных величин).

Варианты

22.

$$\frac{4}{\pi} \iiint_{\substack{x>0 \\ a<y<bx \\ 0<z<cx}} x^{-2} e^{-px^2-y^2-z^2} dx dy dz$$

23.

$$\frac{4}{\pi} \iiint_{\substack{x>0 \\ 0<t<bx \\ z>cx}} e^{b^2 x^2 - t^2 - z^2} dx dt dz$$

24.

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iiint_{\substack{x>0 \\ t>bx \\ v>cx}} \frac{\sin t}{t} e^{-v^2} dx dv dt$$

25.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iint_{\substack{x>0 \\ 0<t<cx}} x^{-p-1} e^{-t^2} dx dt$$

26.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iint_{\substack{x>0 \\ 0<t<cx+b}} e^{-px-t^2} dx dt$$

27.

$$\iiint\limits_{\substack{x_1+x_2+x_3+x_4<1 \\ x_i>0}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} x_3^{p_3-1} x_4^{p_4-1} e^{10^{-3} \frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{1+x_1 x_2 x_3 x_4}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

28.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iiint_{\substack{x>0 \\ y>0 \\ 0<z<axy}} \frac{1}{y^3} e^{-px-\frac{q}{y^2}-z^2} dx dy dz$$