Гусеница - SSA

02.09.2010

$F_N = (f_0, \dots f_{N-1})$ → точечное наблюдение.

Здесь врем. ряд - это, вообще, просто последовательность.

$f_i = \varphi(i \cdot \Delta t)$

$1 < L < N$ L - длина окна

Алгоритм.

I этап: Разложение.

(1) Вложение - последовательность в L-мерное пространство.

$X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T \in \mathbb{R}^L$ - вектора L-вложения

$i = 1, \dots, K$ $K = N - L + 1$

$$\mathbb{X} = [X_1 : X_2 : \dots : X_K] = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ f_{L-1} & f_L & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$ - (L-) траекторная матрица (пакет)

Замечание:



- тёплицева матрица (в узлах стоят одинаковые значения) Toeplitz.

(2) Сингулярное разложение (Singular value decomposition - SVD).

$$\mathbb{X} = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\sqrt{\lambda_i}\, U_i V_i^T}_{:= \mathbb{X}_i}$$ - i-ая рана 1 (см. К.-Лоэва)

II этап: Восстановление

(3) Группировка

$I = \{1, \dots, d\}$ $\quad I = \bigsqcup_{j=1}^{m} I_j$ - дизъюнктное объединение

$$\mathbb{X}_{I_j} = \sum_{i \in I_j} \mathbb{X}_i$$

$$\mathbb{X} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{X}_{I_j}$$ - результат группировки

(4) Диагональное усреднение

$$\boxed{F_N = F_N^{(1)} + \dots + F_N^{(m)}}$$ - результат

07.09.2010

Сингулярное разложение

$\mathbb{X}$ - матрица $L \times K$

$S := \mathbb{X}\mathbb{X}^T$ - $L \times L$; симметр., неотриц. опред.

Находим $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ - соб. числа S

и $\{U_i\}_{i=1}^{L}$ - ортонормированная система соб. векторов S

$d := \max\{i : \lambda_i > 0\}$, т.е. $\lambda_{d+1} = \dots = \lambda_L = 0$

$$V_i := \frac{\mathbb{X}^T U_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad i = 1, \dots d$$

Теорема (существование):

1. $\{v_i\}_{i=1}^{d}$ - ортонормированная система, $A^T u_i = \mathbb{0}_k$ при $i = d+1, \dots, L$
2. Для $1 \le i \le d$ $u_i = \frac{A v_i}{\sqrt{\lambda_i}}$
3. v_i, $i = 1, \dots d$ - соб. в-ра $A^T A$, соотв-ие с. з. λ_i
4. Все остальные соб. в-ра $A^T A$ соотв-ют нулевому с. з.
5. $A = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T$ - SVD-разложение

Д-во:

1. (v_i, v_j)

$$(A^T u_i, A^T u_j) = (u_i, A A^T u_j) = \lambda_j (u_i, u_j) = \lambda_j \mathbb{1}_{\{i=j\}}$$

2, 3 аналогично

4. $V \perp v_i$ $i = 1, \dots, d$ (д-ем, что V соотв. нул. с. з.)

$$(V, A^T u_i) = 0 \Rightarrow (AV, u_i) = 0, \quad i = 1, \dots d.$$

Все в-ра, орт-ые всем u_i, соотв. нул. с. з. $\overset{\text{п. 1}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow AV$ - соб. в-р AA^T, соотв. нулевому с. з.

$\overset{\text{п. 1.}}{\Rightarrow} A^T(AV) = 0 \Rightarrow (A^T A)V = 0 \Rightarrow V$ соотв. нулевому с. з.

5. Разложение ед. матрицы:

$$E_L = \sum_{i=1}^{L} u_i u_i^T \qquad E_L A = A$$

ч. т. д.

$$X = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$$

$\sqrt{\lambda_i}$ – сингулярное число i-ый X

u_i – лев. сингул. вектор X

v_i – правый — « —

$(\sqrt{\lambda_i}, u_i, v_i)$ – i-ая собственная тройка X
(eigentriple (ET))

Единственность SVD-разложения.

1) $\forall\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \quad (u_i, v_i) \leftrightarrow (-u_i, -v_i)$
(В $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ с точностью до $const$. $\|\cdot\| = 1$)

2) $\exists\ \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ подпр-во разм-ти 2, там $\forall$ базис – с. в.

Сумма слагаемых соотв. $\forall$ с. з. опред-ся однозначно.

□ $X = \sum_{i=1}^{L} c_i P_i Q_i^T$, $\{P_i\}_{\in \mathbb{R}^L}$ и $\{Q_i\}_{\in \mathbb{R}^K}$ – ортонорм. сист.

$c_i \geq 0$, $c_1 \geq c_2 \geq \dots$ $d = \operatorname{rank} X$

Утв:

1. $c_i > 0$, $i = 1, \dots d$, $c_{d+1} = \dots = c_L = 0$
2. $c_i^2 = \lambda_i$
3. Для $i = 1, \dots d$ P_i – собств. вектора XX^T.

4. $Q_i = \frac{X^T P_i}{\sqrt{\lambda_i}}$

5. Если все λ_i различны, то SVD единственно с точностью до (знака): $(u_i, v_i) \leftrightarrow (-u_i, -v_i)$

Д-во:

1. XX^T, $x P_i \Rightarrow P_i$ - с. в $\Rightarrow$ п.п 1°-3°

4. явно док-ся

5. comment

Следствие. (# биортогональное разложение - SVD) — ч.т.д.

$\exists\ X = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$, $I \subset \{1 \dots d\}$ → подмн-во тоже будет биортогон-о

$\Rightarrow X_I = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$ - SVD матрицы X_I.

SVD в матричной форме

$X = \sum \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$

$U_d = [u_1 : \dots : u_d]$, $V_d = [v_1 : \dots : v_d]$

$\Lambda_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$

Тогда $X = U_d \Lambda_d^{1/2} V_d^T$ - SVD в матр. форме

$U = [u_1 : \dots : u_L]$, $V = [v_1 : \dots : v_k]$

$\Lambda = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_d & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$ - $L \times k$

$X = U \Lambda^{1/2} V^T$ - SVD (квазидиагональное представление матрицы X)

$X X^T = U \Lambda U^T$ - eigendecomposition → из $\mathbb{R}^L$ в $\mathbb{R}^K$

U - матрица вращения (поворота) - квазидиаг. (так базисы м.б. найдены)

$U^{-1} = U^T$

$(X X^T)^{-1} = U \cdot \Lambda^{-1} U^T$, $X^{-1} = V \cdot \Lambda^{-1/2} U^T$ (X - квадр. невыр)

($\exists$ rank $X = L \le K$) X - вырожденная $\Rightarrow$

$\Rightarrow X^{\dagger} = V (\Lambda^{1/2})^{\dagger} U^T$

псевдообратная.

Матричное разложение и SVD.

$M_{L,K}$ - пространство матриц $L \times K$ с нормой Фробениуса

$\|X\|_M^2 = \sum_{ij} x_{ij}^2$ $\quad (X, Y)_M = \sum_{ij} x_{ij} y_{ij}$

$(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} (X_i, Y_i)$, $\|X - Y\|_M^2 = \sum_{i=1}^{k} |X_i - Y_i|^2$.

столбцы

X и Y M-ортогональны, если $(X, Y)_M = 0$.

$X = \sum X_i$, X_i - M-ортогон. $\Rightarrow \|X\|_M^2 = \sum \|X_i\|_M^2$

$X = \sum_i P_i Q_i^T$ - произвольное разложение на n-цы ранга 1.

М-ца ранга 1 - элементарная мат-ца.

Утв:

Минимальное разложение на элементы матрицы имеет d слагаемых, где $d = \operatorname{rank} X$

Д-во: (понятно что $< d$ не может быть)

$\exists \{P_i\}$ - ортонормированный базис пр-ва столбцов X. $(l \le k)$

$$\Rightarrow \underbrace{X = \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i^T}_{(*)}, \text{ где } Q_i = X^T P_i$$

ч.т.д.

Утв:

$\exists\ Y_1 = P_1 Q_1^T,\ Y_2 = P_2 Q_2^T$

Тогда $(Y_1, Y_2) = /^*(P_1 Q_1^T, P_2 Q_2^T) \overset{*}{=} /(P_1, P_2)(Q_1, Q_2)$

Для $(*)$: $\|X\|_M^2 = \sum_{i=1}^{d} \|P_i Q_i^T\|^2$

Т.о. сингулярное разл-ние - минимальное, биортогональное разлож-е

SVD: $\|X\|_M^2 = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$, $\lambda_i = \|X_i\|_M^2$, $X_i = \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$

Биортогональность SVD: $X_i X_j^T = \mathbb{O}_{L,L}$, $i \ne j$

$X_i^T X_j = \mathbb{O}_{K,K}$

Оптимальность SVD:

(1) Матр. язык.

$M_{L,K}$, $M^{(r)} \subset M_{L,K}$ - матрица ранга $\le r$.

$\exists\ X \in M_{L,K}$

$\|X - Y\|_{\mathcal{M}} \to \min$

$\operatorname{rank} Y \le r$ (2)

Тогда $Y = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$, $r \le d$

(2) Геометр. идея

$X = [X_1 : \dots : X_k]$

$\mathcal{L}_r$ – простр-во разм-и r.

$\min_{\mathcal{L}_r} \sum \operatorname{dist}^2(X_i, \mathcal{L}_r)$. Тогда $\mathcal{L}_r = \operatorname{span}(u_1 \dots u_r)$

$r \le d$

$\min \|X - Y\|^2 = \lambda_{d+1} + \dots + \lambda_r$

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_r}{\lambda_1 + \dots + \lambda_d} = \|X\|^2_{\mathcal{M}}$$

(3) Главные направления.

$X_1, \dots X_k$ $\quad P$

(*) $\max_P \sum_{i=1}^{k} (X_i, P)^2 = \nu_1$ – max Σ кв. проекций на напр-ие.

Ищем главное направление!

P – первое главное направление.

Инв:

1. max в (*) достигается при $P = u_1$, $\nu_1 = \lambda_1$
2. $\max_{P \perp} \sum_{i=1}^{k} (X_i, P)^2 = \nu_k$, где $P \perp P_i$ $i = 1, \dots k-1$

достиг-ся при $P = u_k$, $\nu_k = \lambda_k$

$c_j(u_i) := (X_j, u_i)$ – проекция на i-ой гл. напр-ие

$X_j = \sum_{i=1}^{d} c_j(u_i) u_i$

$z_i := \begin{pmatrix} c_1(u_i) \\ \vdots \\ c_k(u_i) \end{pmatrix}$ – вектор величин проекций на главные напр-ия.

z_i – вектор i-тых гл. компонент

$z_i = X^T u_i = \sqrt{\lambda_i} v_i$

Центрирование в SVD

9.09.10.

Однократное центр.: (центр. по строкам)

$X' = X - A_1(X)$, где $A_1(X) = [\mathcal{E}_1(X) : \ldots : \mathcal{E}_1(X)]$

$\mathcal{E}_1(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i = X \mathbb{1}_k / k$

$A_1(X) = X \mathbb{1}_k \mathbb{1}_k^T / k = \mathcal{E}_1(X) \mathbb{1}_k^T$

$X' = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T$ (здесь другие d, λ_i, u_i, v_i)

$\Rightarrow X = A_1(X) + \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T$.

$u_{0(1)} \overset{def}{=} \frac{\mathcal{E}_1(X)}{\|\mathcal{E}_1(X)\|}$

$\sqrt{\lambda_{0(1)}} = \sqrt{k}\, \|\mathcal{E}_1(X)\|$

$v_{0(1)} = \mathbb{1}_k / \sqrt{k}$

$\Rightarrow X = \sqrt{\lambda_{0(1)}}\, u_{0(1)} v_{0(1)}^T + \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T \quad (*)$

Утв:

1. Разложение $(*)$ – это разл-е на М-ортог. элемент. м-цы.
2. Оно явл-ся SVD $\Leftrightarrow \mathbb{1}_k$ – с. в. $X^T X$.

Д-во:

1. Можно док-ать, что $\mathbb{1}_k \perp V_i \ \forall i$, тогда по св-ваи эл. и-у будет д-но.

$X'\mathbb{1}_k \overset{?}{=} 0$ - тогда док-но (т.к V_i базис прост-ва строк)

$X'\mathbb{1}_k = (X - A_1(X))\mathbb{1}_k = \ldots = 0.$

2. Пок-ать, что $X\mathbb{1}_k$ - с.в $\Rightarrow \mathbb{1}_k^T$ - с.в $\Rightarrow$ (следует из того, что $u_{0(1)} = \frac{Xv_{0(1)}}{\sqrt{\lambda_{0(1)}}}$) биорт. разл-е $\Rightarrow$ SVD

Н.Т.Д.

Следствия:

1. $\mathbb{1}_k \perp V_i \Rightarrow V_i$ - центрир.
2. $\|X\|^2 = \lambda_{0(1)} + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$

Двойное центр-е:

$X: \quad X' = X - A_1(X)$

$X'' = X' - A_2(X')$ ← по столбцам

SVD X''

$$X = \sqrt{\lambda_{0(1)}}\, \underbrace{u_{0(1)}}_{\sim \mathcal{E}_1(X)} \underbrace{v_{0(1)}^T}_{\sim \mathbb{1}_k} + \sqrt{\lambda_{0(2)}}\, \underbrace{u_{0(2)}}_{\sim \mathbb{1}_L\ \mathcal{E}_2(X')} \underbrace{v_{0(2)}^T}_{} + \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}\, u_i v_i^T$$

$$\|X\|^2 = \lambda_{0(1)} + \lambda_{0(2)} + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i.$$

$$A^{(1,2)}(X) = A_1(X) + A_2(X) - A_1(A_2(X)) = A_1(X) + A_2(X').$$

Разложение Шмидта.

$(\mathcal{X}_1, \mathcal{O}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{X}_2, \mathcal{O}_2, \mu_2)$

$\mathcal{L}_1^2 = \mathcal{L}^2(\mathcal{X}_1, \mu_1)$, $\mathcal{L}_2^2 = \mathcal{L}^2(\mathcal{X}_2, \mu_2)$

$\mathcal{L}_{1,2}^2 = \mathcal{L}^2(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mu_1 \times \mu_2)$

Возьмём $g \in \mathcal{L}_{1,2}^2$, $\|g\| \neq 0$

$G: \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_1^2$

$Gh = \int g(x,s) h(s) \mu_2(ds)$

$G^*: \mathcal{L}_1^2 \xrightarrow{\mathcal{X}_2} \mathcal{L}_2^2$

$G^* f = \int_{\mathcal{X}_1} g(x,s) f(x) \mu_1(dx)$

Строим самосопр. опер-р:

$G^*G: \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2^2$ $\quad GG^*: \mathcal{L}_1^2 \to \mathcal{L}_1^2$

Обозн: $g_{22}(s,t) = \int g(x,s) g(x,t) \mu_1(dx)$

$g_{11}(x,y) = \int_{\mathcal{X}_2} g(x,s) g(y,s) \mu_2(ds)$

Th:

1. GG^+ имеет хотя бы 1 ненулевое с.з.
2. с.з. ненулевых четное число с конечной кратн.

$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ - с. ф-ии соотв. λ_i

Утв:

1. $\forall$ ф-ция $\varphi \in \mathcal{L}_1^2 \perp \varphi_n$, $n \geq 1$, соотв. ненулев. с.з.
2. Если мы введем $\psi_n = \frac{G^* \varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ - орт. сист. в $\mathcal{L}_2^2$.

ψ_n - с. ф-ии опер-а G^*G.

Разложение операторов:

$$Gh = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \langle h, \Psi_n \rangle_2 \varphi_n, \quad h \in L_2^2$$

$$G^* f = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \langle f, \varphi_n \rangle \Psi_n$$

Разложение Шмидта ф-ции из $L_{1,2}$.

$$g = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \varphi_n \otimes \Psi_n$$

Частные случаи:

(1). SVD: $\mathcal{X}_1 = \{1 .. L\}$ μ_1 и μ_2 - счет. мера

$\mathcal{X}_2 = \{1 .. K\}$

$g_{ij}(i,j) \leftrightarrow x_{ij}$ $g_{ij} GG^* \leftrightarrow X^T X$

(2). Разложение Карунена - Лоэва.

$g(x,s)$ $\mathcal{X}_1 = [0,T]$ μ_1 - мера Лебега

$\zeta_t(\omega)$ $\mathcal{X}_2 = (\Omega, \mathcal{F})$, μ_2 - вер. мера

считаем, что $E\zeta_t(\omega) = 0$ (т.е. $\int_{\mathcal{X}_2} g(x,s)\mu_2(ds) = 0$)

$\int_0^T E\zeta_t^2(\omega)\, dt < \infty$.

$g_{12}(t_1, t_2) = \operatorname{cov}(\zeta_{t_1}, \zeta_{t_2})$

$\zeta_t = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) \varepsilon_n$.

(3). Анализ главн. компонент на сл. эл.

$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_L \end{pmatrix}$ $\mathcal{X}_2 = (\Omega, \mathcal{F})$ μ_2 - вер. мера.

$\mathcal{X}_1 = \{1 .. L\}$ μ_1 - счет. мера

g_{11} - ков. м-уа этого век-ра.

$g_{11}(i,j) = cov(\xi_i, \xi_j)$

φ_n - с.в. ков. м-ца (над-ва μ_n)

$U_n \overset{def}{=} \varphi_n$.

$\xi(\omega) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} U_n \varepsilon_n(\omega)$.

(4). Вибрационный анализ ал. хэш.

$\mathcal{I}_1 = \{1, \dots L\}$ μ_1 счит. мера

$\mathcal{I}_2 = \{1 \dots K\}$ μ_2 вер. мера равном., т.е. $\mu_2(\{i\}) = \frac{1}{K}$

$g(i,j) = x_{ij}$, i - номер признака, j - номер индивида

$\mathbb{X}$ - центр. по строкам: $\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} x_{ij} = 0$.

$GG^* \longleftrightarrow \frac{1}{K}\mathbb{X}\mathbb{X}^T$

SVD: λ_i U_i V_i

АГК: $\frac{\lambda_i}{K}$ U_i $\sqrt{K} V_i$

Терминология АГК:

$\mathbb{X} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ - разложение АГК

центрир. ? с.ч. с.в. факт. в-а (значения) factor scores.

$F_i = \sqrt{\lambda_i} U_i$ - факторные ~~вра~~ ~~(значения)~~ веса (нагрузки) factor weights (loadings)

$Z_i = \sqrt{\lambda_i}\, V_i$ – вектор i-их гл. компонент

Или $Z_i = X^T U_i$

$Q_i = \frac{U_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ – factor coefficients.

16.09.10. Сингулярное разложение траекторных матриц.

$\underbrace{F_N}_{\text{наблюд.}} = \underbrace{F_N^{(1)} + F_N^{(2)}}_{\text{хотим разд.}}$

Какие должны быть слагаемые, чтоб можно было их разделить

$F_N = (f_0, \dots f_{N-1})$, $1 < L < N$

$X = X^{(1)} + X^{(2)}$

$Z^{(L,1)}$, $Z^{(L,2)}$ – подпр-ва натянутые на L-е столбцы $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$

$Z^{(K,1)}$, $Z^{(K,2)}$ — — — и — и — строки — и —

Опр: Ряды $F_N^{(1)}$, $F_N^{(2)}$ называются слабо L-разд-ми, если $Z^{(L,1)} \perp Z^{(L,2)}$ и $Z^{(K,1)} \perp Z^{(K,2)}$.

Будем говорить просто ряды разд-ы, подразумевая слабо L разд.

Утв: $\exists\ X^{(1)} = \sum_m \sqrt{\lambda_{1m}}\, U_{1m} V_{1m}^T$

$X^{(2)} = \sum_k \sqrt{\lambda_{2k}}\, U_{2k} V_{2k}^T$ и ряды $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ разд.

Тогда $X = \sum_m \sqrt{\lambda_{1m}}\, U_{1m} V_{1m}^T + \sum_k \sqrt{\lambda_{2k}}\, U_{2k} V_{2k}^T$ –

SVD-разл. X.

Д-во:

1. U_{1m} и V_{1m} – орт-н.
2. U_{2k} и V_{2k} – « —
3. U_{1m} и U_{2k} – ор-н (из разд)
4. V_{1m} и V_{2k} – » —

$\Rightarrow$ получаем SVD.

ч.т.д.

Def: $\exists$ разл слабо разделимые $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ и $\lambda_{1k} \neq \lambda_{2m}$ $\forall k, m$. Тогда $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ – сильно разделимы.

Утв:

1. $\exists$ разл слабо разделимые, тогда найдется такое SVD м-ца X, для которого $\exists$ разбиение соб. троек на 2 части; одна из которых даст SVD м-ц $X^{(1)}$, другая – SVD $X^{(2)}$
2. $\exists$ разл сильно разделимые, тогда для $\forall$ SVD м-цы X — « — « —

б/д.

Утв (условия разделимости):

$F_N^{(1)} = (f_0^{(1)}, \dots f_{N-1}^{(1)})$ и $F_N^{(2)} = (f_0^{(2)}, \dots f_{N-1}^{(2)})$,

$L, K = N - L + 1$.

Разл $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ слабо разделимы $\Leftrightarrow$

(α) $f_k^{(1)} f_m^{(2)} + \dots + f_{k+L-1}^{(1)} \cdot f_{m+L-1}^{(2)} = 0$

$\forall\ 0 \le k, m \le K-1$.

(β) $f_k^{(1)} f_m^{(2)} + \dots + f_{k+K-1}^{(1)} \cdot f_{m+K-1}^{(2)} = 0 \quad \forall\ 0 \le k, m \le L-1$.

Д-во:

$\mathcal{L}^{(1,1)} \perp \mathcal{L}^{(1,2)} \Leftrightarrow (\mathcal{H}^{(1)})^T \mathcal{H}^{(2)} = \mathbb{O}_{K,K}$

ч.т.д.

Следствие:

Если $F_\mathcal{L}^{(1)}$ и $F_\mathcal{L}^{(2)}$ разделимы, то

(a) $f_k^{(1)} f_m^{(2)} = f_{k+1}^{(1)} f_{m+1}^{(2)} \quad \forall\, 0 \le k, m \le K-2$

(b) $f_m^{(1)} f_0^{(2)} + \ldots + f_{m+L-1}^{(1)} f_{L-2}^{(2)} = 0 \quad \forall\, 0 \le m \le K-1$

(c) — " — вместо k ставим L и наоборот.

(d) — " —

Замечание: Если $F_\mathcal{L}^{(1)}$ имеет период M, то $L : M$ и $K : M$, то (a) и (b) $\Leftrightarrow$ (a), (b), (c), (d).

Д-во след-е:

" (a) $\Rightarrow$ (a), (b)":

(b) - очевидно

(a) берем 2 р-ва для k, m и $k+1, m+1$, вычитаем, получаем (a).

Зам: Пр-во рядов отр-ых от данного явл-ся либо пустым, либо лин. пр-вом.

ч.т.д.

Примеры:

① $f_i^{(1)} = C \neq 0$.

(a) $\Rightarrow C f_i^{(2)} = C f_{i+L}^{(2)} \Rightarrow F_N^{(2)}$ имеет период M: $L \vdots M$.

(c) $\Rightarrow K \vdots M$.

(в) $\Rightarrow f_0^{(2)} + \ldots + f_{M-1}^{(2)} = 0$ (M т.к. период)

(d) $\nRightarrow$

Станд. пример: $f_n^{(2)} = A\cos(2\pi\omega n + \varphi)$, где 2ω - целое, $k\omega$, (одно из этих усл. можно заим-ть $(k+1)\omega$)

(Если дискр.-послед., то нельзя опред., что такой период. перод. Для непер. сиг период может быть и не целый. T-не целый $\Rightarrow T : P = K \leftarrow$ целое - период послед.)

② Отделимость от экспоненты.

$f_n^{(1)} = e^{\alpha n}$.

$\tilde{f}_n^{(1)} = e^{-\alpha n} f_n^{(1)}$

$\tilde{f}_n^{(2)} = e^{\alpha n} f_n^{(2)}$

Легко пр-ть, что разд-ть $\tilde{f}_n^{(1)}, \tilde{f}_n^{(2)}$ равнв-а разд-ть $f_n^{(1)}, f_n^{(2)}$.

$\tilde{f}_n^{(1)} \equiv 1 \Rightarrow$ знаем условия на $\tilde{f}_n^{(2)}$.

$e^{\alpha n} f_n^{(2)}$ имеет период M: $2 \cup K : M$ и

$e^{\alpha \cdot 0} f_0^{(2)} + \ldots + \alpha^{\alpha(M-1)} f_{M-1}^{(2)} = 0$

Станд. пример: $f_n^{(2)} = Ae^{-\alpha n}\cos(2\pi\omega n + \varphi)$, усл. на $L \cup K$ аналог.

(3). Отделимость от гармоник. ряда.

$f_n^{(1)} = \cos(2\pi w n + \varphi)$. $0 < w < 1/2$

($w = 0 \Rightarrow f_n^{(1)} = \text{const}$

$w = 1/2 \Rightarrow T = 2$ – это мин. возможн. период для посл).

$L, k \geq 3$.

(a) $\cos(2\pi w m + \varphi) f_k^{(2)} = \cos(2\pi w(L+m) + \varphi) f_{k+L}^{(2)}$

$\cos(2\pi w m + \varphi) f_k^{(2)} = \cos(2\pi w m + \varphi) \cdot \cos(2\pi w L) f_{k+L}^{(2)} -$

$- \sin(2\pi w m + \varphi) \cdot \sin(2\pi w L) f_{k+L}^{(2)}$.

Фиксир. k, меняем m и запис-ем рез-т в векторной форме.

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi w \cdot 0 + \varphi) \\ \cos(2\pi w \cdot 1 + \varphi) \\ \cos(2\pi w (k-2) + \varphi) \end{pmatrix} \left(f_k^{(2)} - \cos(2\pi w L) f_{k+L}^{(2)} \right) + \begin{pmatrix} \sin \\ \sin \\ \\ \sin \end{pmatrix} \sin(2\pi w L) \cdot f_{k+L}^{(2)} = 0$$

т.к. в-а лин. нез.

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos(2\pi w L) f_{k+L}^{(2)} = f_k^{(2)} \\ \sin(2\pi w L) f_{k+L}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$= 0$ (т.к. не сит. нулевые рядом)

$\Rightarrow 2\pi w L$ – целое

$\Rightarrow$ или $\begin{cases} wL - \text{целое} \\ f_{k+L}^{(2)} = f_k^{(2)} \end{cases}$

или $\begin{cases} 2\pi wL - \text{целое} \\ wL - \text{нет} \\ f_{k+L}^{(2)} = f_k^{(2)} \end{cases}$

Аналогично из (c).

(b), (d) делаем то же самое.

④ $f_n^{(1)} = e^{\alpha n} \cos(2\pi\omega n + \varphi)$

$f_n^{(2)} = A e^{-\alpha n} \cos(2\pi\tilde{\omega} n + \varphi)$ (как и из 1).

⑤. Отрешимость от лин. ряда $f_n^{(1)} = an + b$, $a \neq 0$

(а $ak f_m^{(2)} + b f_m^{(2)} = ak f_{m+L}^{(2)} + (aL+b) f_{m+L}^{(2)}$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k-2 \end{pmatrix} a\left(f_m^{(2)} - f_{m+L}^{(2)}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left(b f_m^{(2)} - (aL+b) f_{m+L}^{(2)}\right)$$

$\Rightarrow f_m^{(2)} = f_{m+L}^{(2)}$ и $b f_m^{(2)} = (aL+b) f_{m+L}^{(2)}$

$\Rightarrow b = aL + b \Rightarrow$ нет рядов отр. от лин.

23.09.10. Приближенная и асимптотическая разделимость.

Треб-ния точной разд. очень сильны $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ надо придумать как описывать по другому.

Приближ. ортогональность:

$F_N = (f_0, \dots f_{N-1})$

$F_{i,j} = (f_{i-1}, \dots, f_{j-1})$, $1 \le i \le j \le N$ - отрезок ряда

Ex: $F_N \overset{def}{=} F_{1,N}$.

$\exists$ есть 2 ряда: $F_N^{(1)} = (f_0^{(1)} \dots f_{N-1}^{(1)})$, $F_N^{(2)} = (f_0^{(2)} \dots f_{N-1}^{(2)})$.

Мера ортогональности 2х произвольных отрезков длины M:

$$\rho_{i,j}^{(M)} = \frac{\left(F^{(1)}_{i,i+M-1}, F^{(2)}_{j,j+M-1}\right)}{\| F^{(1)}_{i,i+M-1} \| \cdot \| F^{(2)}_{j,j+M-1} \|}, \quad i,j \ge 1, \quad M \le N-1-\max(i,j)$$

$(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение

$\rho_{i,j}^{(M)}$ - это косинус угла м/у соответ-ми векторами.

В этот. терм.: $\rho_{i,j}^{(M)}$ - коэф. корреляции.

Def: Ряды $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ будем назвать (слабо) ε-разделимыми при фикс. длине окна L, если:

$$\rho^{(L,K)} \overset{def}{=} \max\left(\max_{1 \le i,j \le K} \left| \rho_{i,j}^{(L)} \right|, \max_{1 \le i,j \le L} \left| \rho_{i,j}^{(K)} \right| \right) < \varepsilon$$

$K = N - L + 1$

Замечания:

1. Если ε-мало то ε-разделимые ряды можно назвать приближенно разделимыми.

2. Когда может возникнуть прибл. разделимость?
   - Если $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ разделяются при нек. k и k, то $F_N^{(1)}+\Delta_N^{(1)}$, $F_N^{(2)}+\Delta_N^{(2)}$ при малых $\Delta_N^{(1)}$ и $\Delta_N^{(2)}$ будут прибл. разд-ся.
   - Если $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ - разделимы при нек. k и k, то они будут прибл. раз-ся при $\tilde{k}$ и $\tilde{k}$, близких к k и k.

Асимптотич. разделимость:

$\exists$ бесконечные ряды:

$F^{(1)}=(f_0^{(1)},\dots f_n^{(1)},\dots)$ и $F^{(2)}=(f_0^{(2)},\dots f_n^{(2)},\dots)$

$F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ - состоят из первых N членов бесконечных рядов.

$\exists\ 1<k=k(N)<N$ - т.е. ф-ия от N ($\Rightarrow k=k(N)$)

Def: Ряды $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ наз-ся $k(N)$-асимптотически разделимыми, если

$$\rho^{(k(N),k(N))} \to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Def: Ряды наз-ся (регулярно) асимптотически разделимыми если они $k(N)$-разделимы для всех ф-ций $k(N)$: $\frac{k(N)}{k(N)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Утв:

$F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ – асимп. разделимы, если

$$(*)\quad \rho(N_1,N_2) \overset{def}{=} \max_{i,j<N_1} \frac{\sum_{k=0}^{N_2-1} f^{(1)}_{i+k} f^{(2)}_{j+k}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N_2-1}\left(f^{(1)}_{i+k}\right)^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N_2-1}\left(f^{(2)}_{j+k}\right)^2}} \xrightarrow[N_1,N_2\to\infty]{} 0$$

* ф-ла для $\rho(i,k)$, т.к. i и k – симм и $\forall$, то утв. справедливо.

ч.т.д.

Примеры асимп разделимости и скорость сходимости:

<1> с константой: $f^{(1)}_n = c$

Тогда (*): $\rho(N_1,N_2) = \dfrac{c\sum_{k=0}^{N_2-1} f^{(2)}_{j+k}}{c\sqrt{N_2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N_2-1}\left(f^{(2)}_{j+k}\right)^2}} =$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N_2-1} f^{(2)}_{j+k}}{\sqrt{N_2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N_2-1}\left(f^{(2)}_{j+k}\right)^2}} \xrightarrow[N_2\to\infty]{} 0$$

а) $f^{(2)}_n = \sum_{k=0}^{m} C_k \cos(2\pi\omega_k n + \varphi_k)$, $\omega_k \in (0, 1/2)$

$\varphi_k \in [0, 2\pi)$

∃ все ω_k – разные: тогда

$$\sum_{k=0}^{N_2-1} f_{j+k}^{(2)} = O(1), \text{ т.к. } \sum_{k=0}^{mT-1} f_{j+k}^{(2)} = 0, \text{ где } T = \max_k \frac{1}{\omega_k}$$

$$\sum_{k=0}^{N_2-1} \left(f_{j+k}^{(2)}\right)^2 \sim \frac{N_2}{T} \sum_{k=0}^{T-1} (f_k)^2 = O(N_2)$$

Т.о. имеем: $\rho(N_1, N_2) = \dfrac{O(1)}{\sqrt{N_2} \cdot O(\sqrt{N_2})} \sim \dfrac{C}{N_2}$

Вернемся к обозн. через L и k: скорость сход-ти:

$$\frac{1}{\min(L, k)}$$

в) $f_n^{(2)} = e^{\alpha n}$, $\alpha \neq 0$

$$\frac{\sum_{k=0}^{N_2-1} e^{(j+k)\alpha}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N_2-1} e^{2(j+k)\alpha}}} = \frac{\frac{e^{N_2\alpha} - 1}{e^{\alpha}(e^{\alpha}-1)}}{\sqrt{\frac{e^{2N_2\alpha}-1}{e^{\alpha}(e^{\alpha}-1)}}} = \begin{cases} \dfrac{O(e^{\alpha N_2})}{O(e^{\alpha N_2})} = O(1) & \alpha > 0 \\ \dfrac{O(1)}{O(1)} = O(1), & \alpha < 0 \end{cases}$$

$e^{\frac{T}{j}}$ сокращаются.

Т.о. $\rho(N_1, N_2) \sim \dfrac{C}{\sqrt{N_2}}$ и ск-ть сход-ти $\dfrac{1}{\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})}$

Т.е. экспонента отр-ся гораздо хуже, чем гармонич. ряд.

(c). $f_n^{(2)} = e^{\alpha n}\cos(2\pi w n + \varphi)$, $\alpha \neq 0$.

Результат аналогично (б).

d). $f_n^{(2)} = \sum_{l=0}^{m} c_l n^l$, $c_m = 1$ - полином.

$$\sum_{k=0}^{N_2-1}\sum_{l=0}^{m} c_l (j+k)^l \sim \Theta(N_2^{m+1}) \text{ при фикс. } j.$$

$$\left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{N_2-1}\left(\sum_{l=0}^{m} c_l (j+k)^l\right)^2 \sim \Theta(N_2^{2m+1})$$

Т.О. получаем:

$$\rho(N_1, N_2) \sim \frac{\Theta(N_2^{m+1})}{\sqrt{N_2}\cdot\Theta(N_2^{m+1/2})} = \Theta(1) \not\to 0$$

Т.О. никакой полином не отр-ет от конст., даже асимп.

(2). Асимп. разд. с норм. рядом

$f_n^{(1)} = \cos(2\pi w_1 n + \varphi_1)$.

a). $f_n^{(2)} = \cos(2\pi w_2 n + \varphi_2)$

$$\rho(N_1, N_2) = \frac{\Theta(1)}{\Theta(\sqrt{N_2})\Theta(\sqrt{N_2})} = \Theta\left(\frac{1}{N_2}\right)$$

$\Rightarrow$ сх-ть сход-ти $\frac{1}{\min(L_1 k)}$

∃ у нас есть 2 косинуса с близкими частотами.

Утв: ∃ последть $N_2 \to \infty$, т.ч. при $N_2 \to \infty$

$$\rho(N_1, N_2) \sim \frac{C}{N_2(w_2 - w_1)}$$

Д-во:

$$\star \sum_{k=0}^{N_2-1} \cos(2\pi k w_1 + \varphi_1)\cos(2\pi k w_2 + \varphi_2)$$

Т.к. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$, то получаем:

$$\sum_{k=0}^{N_2-1} \left[\frac{1}{2}\cos\left(2\pi k(w_2 - w_1)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi k(w_2 + w_1)\right) \right]$$

при $w_2 \to w_1$ получаем:

$$\int_0^{N_2} \cos(2\pi x(w_2 - w_1))dx = \frac{\sin 2\pi N_2(w_2 - w_1)}{2\pi(w_2 - w_1)}$$ ч.т.д.

Т.о. если $w_1 \approx w_2$, то L и $K = N - L + 1$ должны быть существ-о больше $1/|w_1 - w_2|$.

ооодд.

б). $f_n^{(2)} = \sum_{l=0}^{m} c_l n^l$, $c_l = 1$.

В числителе: $O(N_2^m)$

$$\int_0^N x^l \cos x\,dx = -\int_0^N x^l d\sin x = x^l \sin x\Big|_0^N - \int l x^{l-1}\sin x\,dx$$

В знаменателе: $O(\sqrt{N_2}) \cdot O(N_2^{m+1/2}) \sim x^N = O(N_2^{m+1})$

$\Rightarrow$ ск-ть сход-ти $1/\min(L, K)$.

② $f_n^{(2)} = e^{\alpha n}$

$\alpha > 0$: $\dfrac{e^{\alpha N_2}}{N_2^{1/2} \cdot e^{\alpha N_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{N_2}}$

$\alpha < 0$: $\dfrac{O(1)}{\sqrt{N_2} \cdot O(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{N_2}}$

$\Rightarrow$ скор. сх-ти: $1/\min(\sqrt{I}, \sqrt{k})$.

а) $f_n^{(2)} = e^{\alpha n} \cos(2\pi n w_2 + \varphi_2)$ – рез-т аналогично

Зам: для $\cos$ с $w = 1/2$ результат тоже ②

③ Асимпт. разделимость с полиномом.

$$f_n^{(1)} = \sum_{l=0}^{m} c_l n^l$$

а) $f_n^{(2)} = e^{\alpha n}$, $\alpha \neq 0$

$$\left(\int_0^{\sim N} x e^{\alpha x} dx = x e^{\alpha x} \Big|_0^{\sim N} - \int_0^{\sim N} e^{\alpha x} dx \sim O(N e^{\alpha N}) \right)$$

$\alpha > 0$: $\rho(N_1, N_2) \sim \dfrac{N_2^m \cdot e^{\alpha N_2}}{N_2^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{\alpha N_2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{N_2}}\right)$

$\alpha < 0$: $\rho(N_1, N_2) \sim \dfrac{N_2^m}{N_2^{m+\frac{1}{2}} \cdot O(1)} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{N_2}}\right)$

в). $f_n^{(2)} = \sum_{l=0}^{\widetilde{m}} \tilde{c}_l n^l$ – не отличим от другого полинома, т.к. $p(N_1, N_2) \neq 0$.

(4). Асимпт. раздельимость с экспонентой.

$$f_n^{(1)} = e^{\alpha n}$$

а). $f_n^{(2)} = e^{\beta n}$ $\alpha \geq \beta$; $\alpha, \beta > 0$

Покажем, что асимпт. раздельимость есть только, если $\alpha > 0 \wedge \beta < 0$.

α, β	$\alpha + \beta$	
>0 >0	>0	$e^{(\alpha+\beta)N_2} / e^{\alpha N_2} \cdot e^{\beta N_2} = \Theta(1)$
<0 <0	<0	$\Theta(1) / \Theta(1) \cdot \Theta(1) = \Theta(1)$
>0 <0	>0	$e^{(\alpha+\beta)N_2} / \Theta(1) \cdot e^{\alpha N_2} = e^{-\lvert\beta\rvert N_2}$
>0 <0	<0	$\Theta(1) / \Theta(1) e^{\alpha N_2} = e^{-\alpha N_2}$

Т.о. при $\alpha \cdot \beta < 0$ ск-ть сх-ти: $\Theta(e^{-\min(|\alpha|, |\beta|) \cdot \min(L,k)})$.

Таблица.

	конст	косинус	полином	экспон
конст	–	$1/\min(L,k)$	–	$1/\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})$
косин.	$1/\min(L,k)$	$1/\min(L,k)^{w_1 \neq w_2}$	$1/\min(L,k)$	$1/\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})$
полин.	–	$1/\min(L,k)$	–	$1/\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})$
экспон.	$1/\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})$	$1/\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})$	$1/\min(\sqrt{L}, \sqrt{k})$	$e^{-\min(|\alpha|, |\beta|)\min(L,k)}_{\alpha\beta<0}$

30.09.10. Стохастическая разделимость

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ – веск случ. послед-ти.

Def: $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ наз-ся $2(N)$-стохастически разделимыми, если

$$\rho^{(2(N),\,4(N))} \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0$$

Утв: $\exists$ $F^{(1)}$ – детермин. послед;

$F^{(2)}$ – норм. бел. шум;

Тогда стох-ки разделимы, если

$\exists\, a>0 : 2(N)/4(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} a$

б/д.

Гаусселизация (для усерд.)

Если бы была точная разделимость
то м-ца получились бы гаусс.
А в прибл. разделимости м-уа ~ гаусс-а
⇒ нужна гаусселизация.

Т: врем. ряд ↔ гаусс. матр.

$H: M_{L,K} \to M^{(H)}_{L,K}$ – проектор (получаем прибл-е в норме Фробениуса)

$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ $\quad$ $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$

$$\min_{\Psi\in M^{(H)}_{L,K}} \|X-\Psi\|^2_{\mathcal{H}} \to ?$$ достигается на гаусс. м-це

Работать с полиномами удобнее по диагонали:

$$\sum_i \sum_j ( )^2 = \sum_s \sum_{i+j=s} ( )^2$$

$I = \{1 \dots n\}$ $\mathcal{P}^{(2)} : M_{2,k} \to M_{L,k}^{\text{ранга } r}$

$\tilde{F}_N^{(1)} = T H \mathcal{P}^{(2)} T F_N$ — метод „Гуссинга"

$\tilde{F}_N^{(1)} = T^{-1} (H \mathcal{P}^{(2)})^m T F_N$ — метод Cadzow

Необходимые условия разделимости.

$\hat{\mathcal{H}}^{(1)}$ и $\hat{\mathcal{H}}^{(2)}$ — восстановление

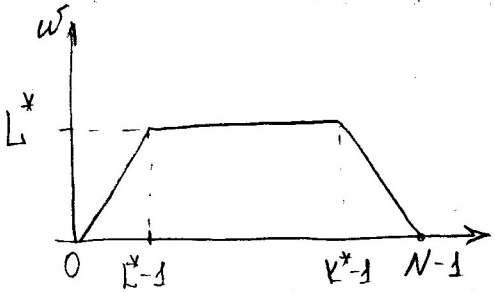
разд-ть $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ биорт $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ M-ортогон. $(\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)})_M = 0$

$\Rightarrow \underbrace{T^{-1}\mathcal{H}^{(1)}}_{F_N^{(1)}}$ и $\underbrace{T^{-1}\mathcal{H}^{(2)}}_{F_N^{(2)}}$ — ?

Чтобы понять необходимо $(\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)})_M$ расписать через элементы ряда. Это будет взвешенное скалярное произведение.

$$(\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)})_M = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f_i^{(1)} f_i^{(2)} \overset{\det}{=} (F_N^{(1)}, F_N^{(2)})_w$$

w_i — число эл-тов на i-ой диаг-ли.



$L^* = \min(L, K)$ $K^* = \max(L, K)$

Утв: Необходимое условие разд-ти:

$(F_N^{(1)}, F_N^{(2)})_w = 0.$

Применение:

1. Кластеризация → проверить хорошо ли.

2. Не знаем как групп-ть, тогда:

] $I_j = \{j\}$, тогда получаем все-ое разр $\tilde{F}_N^{(1)}, \dots, \tilde{F}_N^{(2)}$ и можем построить матрицу взвешенных корреляций (w-кор-ий) для ж-их разрез с элементами

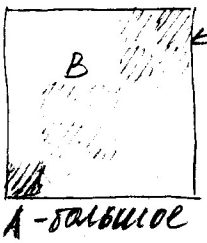
$$\rho_{ij}^{(w)} = \frac{(\tilde{F}_N^{(i)}, \tilde{F}_N^{(j)})_w}{\|\tilde{F}_N^{(i)}\|_w \|\tilde{F}_N^{(j)}\|_w}$$

Пример:

$$f_n = A + B\cdot\cos(2\pi n/10) + C\cdot\cos(2\pi n/5)$$

Чтобы точная разделимость: $N = 99$

] $L = 20$
$K = 80$



Центрирование и разделимость.

(1). Одинарное центрирование построчно.

$$X = \underbrace{A_1(X)}_{\sqrt{\lambda_{1(0)}}\,\underbrace{U_{1(0)}}_{\tilde{\mathcal{E}}_1(X)}\,V_{1(0)}^T \tilde{\Pi}_K} + \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}\, U_i V_i^T$$

Надо решить у какого ряда среднее по строкам = 0.

а) $\exists\ \mathcal{E}_1(X^{(2)}) = 0$

$$X = \underbrace{A_1(X^{(1)}) + \overbrace{X^{(1)} - A_1(X^{(1)})}^{SVD}}_{F_N^{(1)}} + \underbrace{X^{(2)}}_{F_N^{(2)}}$$

б) $\mathcal{E}_1(X^{(1)}) = 0$

$$X = X^{(1)} + A_1(X^{(2)}) + X^{(2)} - A_1(X^{(2)})$$

Част. случай.

$$X = \underbrace{A_1(X^{(1)})}_{F_N^{(1)}} + \underbrace{X^{(2)}}_{F_N^{(2)}}$$

Если $A_1(X^{(1)}) = X^{(1)} \Rightarrow F_N^{(1)} = const$

отрешимость от const при SSA с однократным центрир-ем:

необх. и дост. усл.: $\mathcal{E}_1(X^{(2)}) = 0 \iff$

$\iff$ или $\sum_{j=0}^{K-1} f_{ij} = 0 \iff$ ряд $F_N^{(2)}$ имеет период M

$K \vdots M$ $f_0^{(2)} + \ldots + f_{M-1}^{(2)} = 0$.

Эти условия слабее, чем без центр.
(без центр $L \vdots M$)

$\Rightarrow$ если хотим отр. от const, то лучше использ SSA с однокр центр.

(2). Двукратное центрирование.

$\exists\ F_N^{(1)}$: $A^{(1,2)}(X^{(1)}) = X^{(1)}$.

Таким услов-ям удовлетв ряд: $f_n^{(1)} = an + b$.

Утв: Для лин. ряда $A^{(1,2)}(\mathbb{X}^{(1)}) = \mathbb{X}^{(2)}$.

Д-во:

$$x_{ij} = a(i+j-2) + b = f_{i-1} + f_{j-1} + b \quad (*)$$

$$a_{ij}^{(12)} = \frac{1}{K}\sum_{m=1}^{K} x_{im} + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} x_{kj} - \frac{1}{LK}\sum_{k=1}^{L}\sum_{m=1}^{K} x_{km}$$

Теперь осталось подст-ть представ. (*).

ч.т.д.

Отр. от лин. ряда с SSA с двойным центрированием:

$$A^{(1,2)}(\mathbb{X}^{(2)}) = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ряд } F_N^{(2)} \text{ имеет период } M, \\ \text{и } f_0^{(2)} + \ldots + f_{M-1}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad L:M,\ K:M$$

Раньше вообще ничего не отделялось а теперь есть ряд, которые отр-ёл.

Можно придумать ас. отделимость. $\Sigma \to 0$ равн. по инд.

Разложение Фурье.

$$F_N = (f_0, \ldots, f_{N-1}) \qquad \text{ч/ч - частота} = \omega.$$

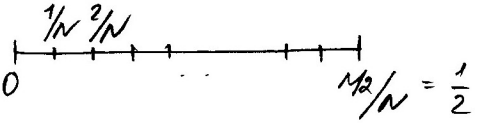
$$f_n = C_0 + \sum_{k=1}^{[(N-1)/2]} \left(C_k \cdot \cos(2\pi k/N) + S_k \cdot \sin(2\pi k/N)\right) + C_{N/2}(-1)^N$$

$\omega = 0$; $\omega = 1/2$; 0, если N - нечет.

В другой форме:

$$f_n = C_0 + \sum_{k=1}^{[(N-1)/2]} A_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \varphi_k\right) + A_{N/2}(-1)^n$$

$$A_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2}$$



Периодограмма:

$$\Pi_f^N(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \omega n} f_n\right|^2, \quad \omega \in \left(-\frac{1}{2}, 1/2\right]$$

Если привести к масштабу $[0, 1/2]$

$$\Pi_f^N(k/N) = \frac{N}{2}\begin{cases} 2C_0^2, & k=0 \\ C_k^2 + S_k^2, & \dots \\ 2C_{N/2}^2, & k = N/2,\ N\text{-четн.} \end{cases}$$

(есть проблема в коэф: множитель $\frac{N}{2}$ и 2)

С такими коэф-ами можем получить:

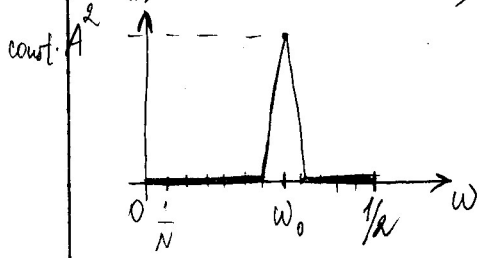
$$(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}) = \frac{N}{2}\sum_{k=0}^{N/2} d_k, \text{ где}$$

$$d_k = \begin{cases} C_k^{(1)} \cdot C_k^{(2)} + S_k^{(1)} \cdot S_k^{(2)} \\ 2C_k^{(1)} C_k^{(2)}, \ k = 0 \text{ или } N/2 \end{cases}$$

$$\|F_N\|^2 = \sum_{k=0}^{[N/2]} \Pi_f^N(k/N)$$

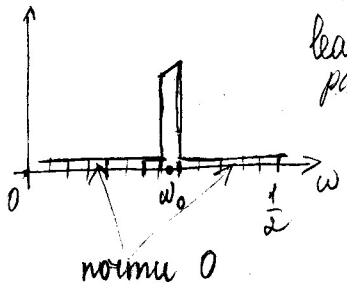
7.10.18. Пример:

<1> $f_n = A\cos(2\pi w_0 n + \varphi)$, Nw_0 - целое



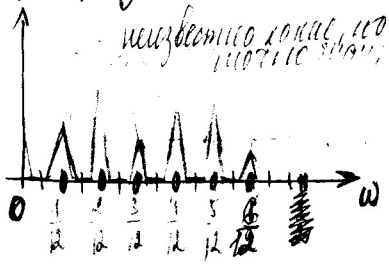
$\{k/N\}$, $k = 0, \ldots [N/2]$

<2> $f_n = A\cos(2\pi w_0 n + \varphi)$, Nw_0 - не целое



leakage - растекание
расходится по всем сосредоточ.

<3> F_N - пучок с периодом 12, $N \vdots 12$



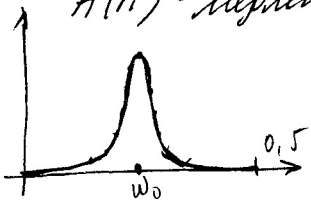
это тоже самое, что пучок из 12 точек.
$\Rightarrow k = 0, \ldots 6$.

Периоды:
~~12~~ 6 4 3 2.4 2

Если $N \not\vdots 12$, то может произойти растекание.

<4> $f_n = A(n)\cos(2\pi w_0 n + \varphi)$

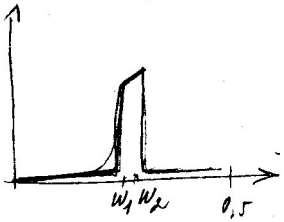
$A(n)$ - медленно-меняющаяся фун.



<5> $f_n = \cos(2\pi\omega_1 n) + \cos(2\pi\omega_2 n)$; где $\omega_1 \approx \omega_2$.

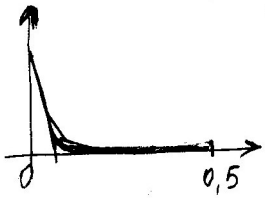
$= 2\cos\left(2\pi \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} n\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} n\right)$

$= A(n)$ т.к. частота очень маленькая.



(Ситуация, когда 2 cos с близ. частотами и cos с мин. амплитудой, не различимы.)

<6> F_N - тренд (медленно-меняющаяся сост-ая ряда, не случайная).



в разложении присут. мал. частот.

<7> F_N - реал. белого шума.



Достаточное условие разделимости.

F_N - ряд Π_f^N - период.

$\{\omega \in \{k/N\} : \Pi_f^N(\omega) \neq 0\}$ - носитель период-ти.

Лемма:
Пусть 2 ряда $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$. Если носитель период. ф-ии ряда $\neq 1$ с нос. период. другого ряда, то их скал. произв. равно 0.

Достат. усл. разд-и:
Если носит. период. отрезков 1го ряда длины l не 1 с носит. период. отрезков длины l 2го ряда и тогда общий периодич. отр-ок длины k, то ряды будут разделимы.

Замечание:
Это усл-е не явл. необходимым.

Контрпример: $f_n = e^{\alpha n}\cos(\dots)$ – достат. усл. не выполнено, но отр. от $f_n^{(2)} = e^{\beta n}\cos(\dots)$.

отступление

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_{i+j}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} R(0) \quad \forall i$$

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_{i_1+j} f_{i_2+j} \xrightarrow[k\to\infty]{} R(|i_1-i_2|) \quad \forall i_1, i_2.$$

Обычно предп., что: $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_{i+j} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \; (c)$

Как измерить качество частот. разделимости?

Опр: частотн. коэф. корреляции:

$$\rho^{\Pi}(F_N^{(1)}, F_N^{(2)}) = \frac{\sum_{k=0}^{[N/l]} \sqrt{\Pi_{f_1}^N(k/N)\,\Pi_{f_2}^N(k/N)}}{\underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{[N/l]} \Pi_{f_1}^N(k/N)}}_{=\|F_N^{(1)}\|} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{[N/l]} \Pi_{f_2}^N(k/N)}}_{=\|F_N^{(2)}\|}}$$

$$0 \le |\rho| \le \rho^{\Pi} \le 1.$$

Можно получить дост. усл. ас. разд-ти. $\forall \cos$:
если $N\to\infty$, то есть ас. разд.
а период. всё чаще $\Rightarrow$ КРУТО!

Особенные примеры (исполь-е SSA):

① $f_n = A(n)\cos(2\pi\omega n)$ $\quad A(n) = ?$ - оценить (слабеющая)

$\star$ ряд $g_n = f_n^2 = A^2(n)\cos^2(2\pi\omega n) = A^2(n) + A^2(n)\cos(2\pi\omega n)$

- тренд + осцил. $\Rightarrow$ прибл. разд

$\Rightarrow$ извлек. $A^2(n) \Rightarrow$ оценив. $A(n)$.

② F_N - шумы гетероскедастичной (гетеросклестичной) т.е. с непост-ой дисперсией

$f_n = A(n)\cdot\varepsilon_n$, $\mathrm{D}(A_n\varepsilon_n) = A^2(n)$ - медленно-меняющ.

$g_n = f_n^2$ имеет тренд (в смысле мат. ожид.) $A^2(n)$



Глава 1: Ряды конечного ранга, конечного порядка и линейно-рекурр-ые формулой (ЛРФ).

§1. Ряды кон. ранга.

F_N, $1 < L < N$, $K = N - L + 1$

$\mathbb{X} = [X_1 : \dots : X_K]$ $\quad \underbrace{\mathcal{L}^{(L)}(F_N)}_{\subset \mathbb{R}^L} = \mathrm{span}(X_1, \dots X_K) \overset{\text{def}}{=} L$-траекторное пр-во ряда F_N.

Def: Ряд F_N имеет L-ранг d ($\mathrm{rank}_L F_N = d$), если

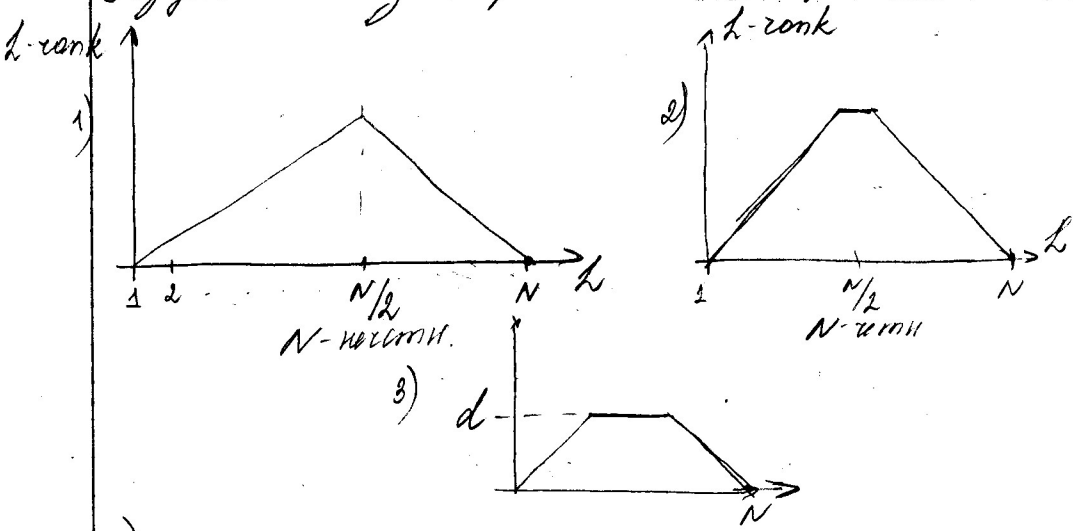
$\dim \mathcal{L}^{(N)}(F_N) = d$. $\quad$ сразу опр-ем и ряд-е

Нас интер-ют ряды с $d < \min(L, K)$

(В общем случае $d \le \min(L, K)$) Если $d \le \min(L, K)$, то пара (d, L, L) - допустимая.

($\mathrm{rank}_L F_N = \mathrm{rank}\,\mathbb{X} = \mathrm{rank}\,\mathbb{X}\mathbb{X}^T = \mathrm{rank}\,\mathbb{X}^T\mathbb{X}$ = число ненул. λ в SVD).

Результат из теории конк. матр.



1) не имеет структ
2) имеет структ.
3) нет структ.

Def: Ряд имеет ранг d, где $d \le \left[\frac{N-1}{2}\right]$, если

$\forall$ допустимого l $\operatorname{rank}_l F_N = d$.

(1+2 vs. 3)

Примеры рядов конечного ранга:

(1). $f_n = Aa^n$ $\quad X = \begin{pmatrix} A & Aa & \dots \\ Aa & Aa^2 & \\ \dots & & \\ Aa^{L-1} & Aa^L & \end{pmatrix}$

(или $f_n = Aa^n \cos(2\pi \cdot 0 \cdot n)$, $n = 0, \dots$)

$\operatorname{rank} F_N = 1$ $\quad$ базис: $(1\ a\ a^2 \dots a^{L-1})^T$

(2). $f_n = Aa^n \cos\left(2\pi \frac{1}{2} n\right) = A(-a)^n$

$\operatorname{rank} F_N = 1$

базис: $(1\ -a\ a^2\ -a^3 \dots)$

③. $f_n = Aa^n \cos(2\pi w n + \varphi)$

$$X = \begin{pmatrix} A\cos\varphi & Aa\cos(2\pi w \cdot 1 + \varphi) & \dots \\ Aa\cos(2\pi w \cdot 1 + \varphi) & Aa^2\cos(2\pi w \cdot 2 + \varphi) & \\ \vdots & \vdots & \\ Aa^{L-1}\cos(2\pi w (L-1) + \varphi) & Aa^L\cos(2\pi w \cdot 2 + \varphi) & \end{pmatrix}$$

базис траект. пр-ва: $\begin{pmatrix} a^0 \cdot \cos(2\pi w \cdot 0) \\ a^1 \cdot \cos(2\pi w \cdot 1) \\ \vdots \\ a^{L-1}\cos(2\pi w (L-1)) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a^0 \cdot \sin(2\pi w \cdot 0) \\ \vdots \\ a^{L-1}\sin(2\pi w (L-1)) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rank} F_N = d$ (при $N \geq 5$).

④. f_n – полином.

$\exists\, f_n = an + b$, $a \neq 0$

$$X = \begin{pmatrix} a\cdot 0 + b & a \cdot 1 + b & \dots \\ a \cdot 1 + b & a \cdot 2 + b & \\ \vdots & \vdots & \\ a(L-1) + b & a \cdot 2 + b & \end{pmatrix}$$

$$X_i = \begin{pmatrix} a \cdot (i-1) + b \\ \vdots \\ a \cdot (i + L - 2) + b \end{pmatrix} =$$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ L-1 \end{pmatrix}} + (a(i-1) + b) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

базис

$\Rightarrow \operatorname{rank} F_N = 2$ (при $N \geq 5$).

14.10.10.

Пример ряда, который не явл. рядом конечного ранга.

$N = 2L-1 \quad f_0 = 1 \quad f_L = 1, \; f_i = 0 \; \forall i$

Ex: $N=5 \quad L=3. \quad F_N = (1, 0, 0, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{rank} = L.$$

Значит бесконечный ряд: $F_3 F_5 F_7 F_9 \ldots$

Далее: $\forall L \quad \dim \mathcal{L}^{(N)} = L$

Об идентификации конечного разложения

Знаем базис тр-ого пр-ва $\Rightarrow$ соб. в $\in$ тр-ому пр

$\Rightarrow$ можем сказать как вош. с.в. (и ф.в. тоже)

Ex: a^n: с.в. — 

т.к. фикс. в-а ст-ей соб. вск-ли, если знать $\lambda_2 = N - \lambda_1 + 1$

$(-a)^n$: 

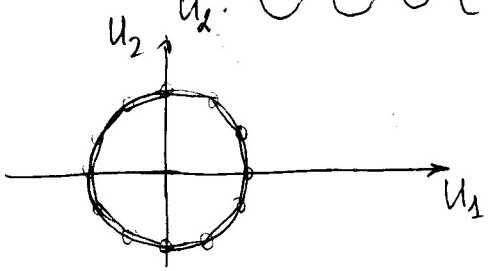
Симм-я: $\lambda \longleftrightarrow N - \lambda + 1$.

$A\cos(2\pi\omega n + \varphi)$

$0 < \omega < 1/2$

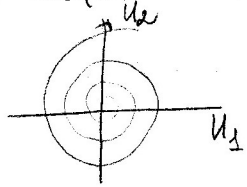
U_1:  с част. ω.

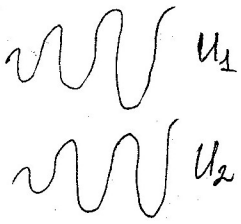
U_2:  с част. ω.



Т.к. с.в. ортог., то в случае когда 2ω целое, то с.в. будут косинусами с разницей в фазах $\pi/2$.

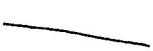
$Ae^{\alpha n}\cos(2\pi\omega n+\varphi)$





$an+b$

u_1:  лин. ф-ция отос.

u_2: 

f_n - полином $\Rightarrow$ с.в. полином.

Ф-ла с.в. повторяет форму коэфф-в.

Когда может быть разница м/у фаст и с.в.мн.?
Если k-маленькое, то модульную (если есть) не увидеть по ~~сам~~ соб. знач, а на факторе отразится.

Замеч. про соб. числа:

$f_n = A\cos(2\pi\omega n+\varphi)$ λ_1 и λ_2

$k=k \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$

ω и $k\omega$-усилс $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$

$\min(k,k)\to\infty \Rightarrow \lambda_1/\lambda_2\to 1$.

(поэтому можем перебирать только соседние вектора).

Ряды конечного порядка

Def: F_n наз-ся рядом порядка $\le d$, если $\exists\ \varphi_k : \{0, \dots k-1\} \to \mathbb{R}$ и $\psi_k : \{0, \dots k-1\} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots d$, такие что $f_{i+j} = \sum_{k=1}^{d} \varphi_k(i) \cdot \psi_k(j)$.

$(\operatorname{ord}_2 F_N \le d)$

$\operatorname{ord}_2 F_N = d$, если $\neg\exists$ т разложения меньшего порядка.

Ex:

1) $f_n = a^n \Rightarrow f_{i+j} = \underbrace{a^i}_{\varphi_1(i)} \cdot \underbrace{a^j}_{\psi_1(j)}$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_2 F_N = 1$.

2) $f_n = \alpha^n \cos(2\pi w n + \varphi)$

$f_{i+j} = (a^i a^j)(\cos(2\pi w i) \cdot \cos(2\pi w j + \varphi)) + (-1) a^i a^j \sin(2\pi w i) \cdot \sin(2\pi w j + \varphi)$

$= a^i \cos(2\pi w i) \cdot a^j \cos(2\pi w j + \varphi) + (-1) a^i \sin(2\pi w i) \cdot a^j \sin(2\pi w j + \varphi)$

$\operatorname{ord}_2 F_N \le 2$.

3) $f_n = an + b \Rightarrow \operatorname{ord}_2 F_N \le 2$

$f_{i+j} = ai + aj + b = \underbrace{(ai + b)}_{\varphi_1(i)} \cdot 1 + 1 \cdot \underbrace{aj}_{\psi_1(j)}$

4) $f_n = n^2$ $\quad ord_L F_N \le 3$.

Утв:

1. $rank_L F_N = d \Leftrightarrow ord_L F_N = d$
2. $\exists\, ord_L F_N \le d$. Тогда $ord_L F_N = d \Leftrightarrow$ $\{\Psi_k\}_{k=1}^{d}$ – лин. нез. и $\{\Psi_k\}_{k=1}^{d}$ лин. нез.

Д-во:

① Д-им зависимость, что $rank_L F_N \le d \Leftrightarrow ord_L F_N \le d$.

"$\Rightarrow$" $\exists\, rank_L F_N \le d \Rightarrow \exists$-т d образующая траекторного пр-ва. Назовём их $\Phi_1, \dots \Phi_d \in \mathbb{R}^L$ и $\Phi_k = (\Psi_k(0), \dots, \Psi_k(L-1))$. Раз Φ_i обр-ие, то $\forall$ вектор выражается через них вер-ли:

$$\begin{pmatrix} f_j \\ \vdots \\ f_{j+L-1} \end{pmatrix} = X_{j+1} = \sum_{k=1}^{d} \Psi_k(j)\Phi_k, \quad j = 0, \dots K-1.$$

$\Rightarrow$ (покомпонентное р-во) $f_{i+j} = \sum_{k=1}^{d} \Psi_k(j)\Psi_k(i)$

"$\Leftarrow$" просто нужно цепочку пройти в обр-ную сторону.

② "$\Rightarrow$" от противного.

"$\Leftarrow$" $\Phi = [\Phi_1 : \dots : \Phi_d]$

$\Psi = [\Psi_1 : \dots : \Psi_d]$ $\quad \Psi_k = (\Psi_k(0), \dots \Psi_k(L-1))$

$\Rightarrow$ $\mathbb{X} = \underset{L \times K}{\Phi}\underset{d \times K}{\Psi^T}$ – получили соотношение для вект. вложения.

$\Rightarrow rank\, \mathbb{X} = d \overset{1}{\Rightarrow} ord_L F_N = d$.

ч.т.д.

Ex: Поиск ранга произвольного полинома.

$\exists\ P_m(t)$ – полином степени m.

$$P_m(s+t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{dP_m(s)}{ds^i} \cdot \frac{t^i}{i!} \Rightarrow ord_i P_m \le m+1.$$

$$= \varphi_i(s)\,\psi_i(t)$$

раскладываем в ряд Тейлора в т. s

т.к. $\{\varphi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ и $\{\psi_j\}_{j=\overline{1,n}}$ – лин. нез-ны $\overset{2^\circ}{\Rightarrow} ord_2 F_N = 2m+1 \overset{1^\circ}{\Rightarrow}$

$\overset{1^\circ}{\Rightarrow} rank\, F_N = m+1.$

Утв: $\exists\ F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ – ряды конечного ранга.

$\Rightarrow$ 1) $d_1 F_N^{(1)} + d_2 F_N^{(2)}$ – кон. ранга при дост. больших N.

2) $F_N^{(1)} \cdot F_N^{(2)}$ – " – " –

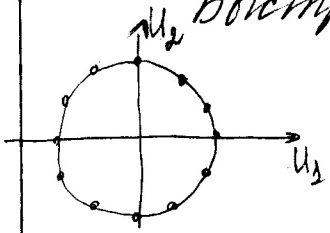
д-во: очевидно.

Следствие: произведений

$\forall$ сумма полиномов, экспонент и косинусов явл-ся рядом конечного ранга при дост. бол. N.

Отступление:

Быстрая оценка периода по U_1 и U_2.



Считаем среднее приращение углов, а период

$\frac{2\pi}{\varphi_n}$ – прир-е угла.

§ Ряды имеющие конечно-разностную размерность и ЛРФ.

$F_N = (f_0, \dots f_{N-1})$

Def: Ряд F_N имеет конечно-разностную размерность ($\dim F_N \le d$), если $0 < d < N-1$ и

$\exists\, a_1, \dots a_d$:

$$f_{i+d} = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{i+d-k} \quad \forall i = 0, \dots, N-d-1.$$

(или ряд управляется ЛРФ) → ЛРФ порядка d

Будем говорить: „ряд размерности d".

$\dim F_N = d$, если d - минимально из всех возможных.

Если d - мнимое., то ЛРФ - минимальная.

Зам:

Опр-е переносится на ∞ ряды

Продолжает опр-е сверху на i и на d.

Ex:

1). $f_n = a^n = a \cdot f_{n+1}$

2). $f_n = e^{\alpha n} \cos(2\pi\omega n + \varphi)$

$f_{n+2} = 2e^{\alpha} \cos(2\pi\omega) f_{n+1} - e^{2\alpha} f_n \Rightarrow \dim F_N \le 2.$

3). $f_n = an + b,\ a \neq 0$

$f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n \Rightarrow \dim F_N \le 2.$

4) $f_n = n^2$

$f_{n+3} = 3f_{n+2} - 3f_{n+1} + f_n \Rightarrow \text{fdim } F_N = 3.$

Обозначим: $X_i = X_i^{(L)}$ - в-р-влияния

Утв:

$\exists\ (N, L, d)$ - допустимая.

1. Если $\text{fdim } F_N \le d \Rightarrow \text{rank}_L F_N \le d.$

Причём, если $X_1^{(L)}, \dots, X_d^{(L)}$ - лин. нез., то

$\text{rank}_L F_N = d.$

2. $\text{fdim } F_N \le d$ и вектора $X_1^{(d)}, \dots X_d^{(d)}$ - лин. нез.

$\Leftrightarrow \text{fdim } F_N = d.$

При этом, лин. комб. ЛРФ яв-ся ЛРФ.

Д-во:

1) $\exists$ верно $f_{i+d} = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{i+d-k}.$

$\Rightarrow X_j^{(L)} = \sum_{k=1}^{d} a_k X_{j-k}^{(L)}, \quad j \in [d+1; K]$

$\Rightarrow \forall$ в-р влияния яв-ся лин. комб. 1^{nx} d век-ов влияния $\Rightarrow \text{rank}_L F_N \le d.$

2) „$\Rightarrow$" от противного $\exists\ \text{fdim} < d$ и т.д. сам-но.

ч.т.д.

Видим, что a_i возникают из разложения в-в влияния через другие в.в.

$$X_{d+1}^{(d)} = \sum_{k=1}^{d} a_k X_{d+1-k}^{(d)}$$

лин. нез $\Rightarrow$ a_k опред. однозн.

$\Rightarrow$ мин. ЛРФ - ед-а.

Ex: контр-пример.

$\nexists$ $F_N = (1, 1, \dots 1, 2)$

$\operatorname{rank}_L F_N = 2$.

$\neg\exists$ ЛРФ, которая порождала и ни 2. $\Rightarrow$

$\neg\exists$ $\text{fdim} F_N$.

В каком смысле верно в обр. сторону? 21.10.10.

F_N - бр. пер.

$F_{l,k} = (f_{l-1}, \dots f_{k-1})$, L, $X_i^{(L)}$.

e_i - i-тый орт.

Теорема (Бух - Шлейбера):

$\exists$ $1 \le \operatorname{rank}_L F_N = d < L$, тогда $\exists d_0$ и M, что

$0 \le d_0 \le d$ и $0 \le M \le d - d_0$ для которых

$\text{fdim}(F_{M+1, M+K+d}) = d_0$.

Д-во:

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ f_{L-1} & \dots & & f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad X_i \in L_d - \text{тр-ое пр-во}; \ \dim L_d = d$$

$\forall \mathcal{L}_d^1$, $\dim \mathcal{L}_d^1 = L - d$

$\exists$ $A \in \mathcal{L}_d^1$ (A вектор) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{d_0} \\ a_1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (т)

$a_{d_0} \neq 0$ ← так обозначим все не нулевое.

Утв-ем, что A такой задаёт ЛРФ, которая управляет игрой, если вычитать нули фигака и с конца. $\forall$

Если мы д-ем, что $r \leq d+1$, то т.т.д. (т.е. док-ем что $\exists A$ т.т. -1 стоит на к-ом месте)

$\exists$ $M_i = \text{span}\{e_1, \dots e_i\}$

$N_i = M_i \cap \mathcal{L}_d^1$

Обозначим $\Delta_i = \dim N_i$

$0 = \Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_L = L - d$ (*)

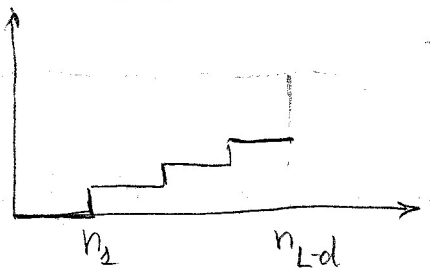
$n_i := \min\{j : \Delta_j = i\}$

Надо д-ть, что $\underbrace{n_1}_{=r} \leq d+1$.

$\forall$ (*) : за L скачков должен набрать L-d.

$\Rightarrow \max\{\Delta_i - \dim s, 1\} = d+1$

ч.т.д.

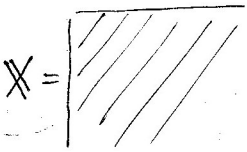


Замечание:

1. $(\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots)$ – ряд бесконечного в обе стороны $\operatorname{rank} F = d \Leftrightarrow$ $\operatorname{fdim} \cdot F = d$ $\forall l > d$.

2. $F = (f_0, f_1, \dots)$, то формулировка Th корректируется: $\operatorname{fdim} F_{n+1,\infty} = d_0$.

Замечание (Гаттингер):

$\mathbb{X} =$ 

$\operatorname{rank} \mathbb{X} = d \Leftrightarrow$ ряд управляется ЛРФ порядка d. (но a_d может быть 0)

(в начале не опред $a_d \neq 0 \Rightarrow d_0 < d$)

Замечание:

Возьмем $y_1 \in N_{n_1}$, достраиваем $y_2 \in N_{n_2} \setminus N_{n_1}$, $\dots$, $y_{L-d} \in N_{n_{L-d}} \setminus N_{n_{L-d-1}}$

$\{y_i\}_{i=1}^{L-d}$ – базис в $Z_d^{\perp}$, наз-ся базисом Шуберта.

y_1 – определ однозн, т.к. из N_{n_1} ($\dim = 1$)

$y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (n) если такого вида (остальные неоднозн)

$\exists\, e_L \notin Z_d \Rightarrow n_{L-d} = L$

Т.к. нам хочется предсказывать ряд, то нам нужна ЛРФ, описывающая ряд до конца.

Можно взять y_{L-d}, кот. порождает ЛРФ порядка $\leq L-1$, которая управ. рядом вплоть до посл. т-ки.

Построение ЛРФ

F_N, L, $e_L \notin \mathcal{L}_d$, $\operatorname{rank}_L F_N = d < L$.

$\mathcal{L}_d = \operatorname{span}(P_1 \dots P_d)$ — ортонорм. базис.

$$P_i = \begin{pmatrix} P_i^{\nabla} \\ \pi_i \end{pmatrix} \Big\} L-1 \in \mathbb{R}^L$$

$e_L \notin \mathcal{L}_d \Leftrightarrow \cos^2 \widehat{e_L, \mathcal{L}_d} < 1 \Leftrightarrow \nu^2 \overset{\text{def}}{=} \pi_1^2 + \dots + \pi_d^2 < 1$.

(ν^2 – коэф. вертикальности подпр-ва $\mathcal{L}_d$.)

Теорема (о явном виде ЛРФ):

$\exists\, e_L \notin \mathcal{L}_d$, $\operatorname{rank}_L F_N = d < L$, то F_N – упр-ся ЛРФ

$$f_{i+L-1} = \sum_{k=1}^{L-1} a_k f_{i+L-1-k} \quad \text{для } i = 0, \dots K-1, \text{ где}$$

для $\mathcal{R} = (a_{L-1}, \dots a_1)^T \in \mathbb{R}^{L-1}$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{i=1}^{d} \pi_i P_i^{\nabla}$$

Д-во:

1. $\exists\, Y = \begin{pmatrix} Y^{\nabla} \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_d$

Д-ем, что $\exists!\, y^*(=y) \begin{pmatrix} Y^{\nabla} \\ y^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_d$

(это следует из того что $e_L \notin \mathcal{L}_d$)

$\exists\, y^{\triangledown} \in \mathcal{L}_d^{\triangledown} = \operatorname{span}(P_1^{\triangledown}, \dots P_d^{\triangledown})$. Тогда $\exists y: \begin{pmatrix} y^{\triangledown} \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_d$ и это доказ-е (из пред-ого) будет.

$y^{\triangledown} = h_1 P_1^{\triangledown} + \dots + h_d P_d^{\triangledown}$

Возьмем $y = h_1 P_1 + \dots + h_d P_d \in \mathcal{L}_d$. – ч.т.д.

2. Покажем, что орт проекция e_2 на $\mathcal{L}_d^{\perp}$ имеет вид $a = (1-\nu^2)\begin{pmatrix} -R \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда теорема б. д-а.

$$\Pi_{\mathcal{L}_d^{\perp}} e_2 = e_2 - \sum_{i=1}^{d} (e_2, P_i) P_i = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{d} h_i P_i^{\triangledown} \\ 1 - \sum h_i^2 \end{pmatrix} = (1-\nu^2)\begin{pmatrix} -R \\ 1 \end{pmatrix}$$

ч.т.д.

Продолжение примера:

<1> $F_7 = (1\dots 12)$ $\quad n = 3$, $d = 2$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}_d = \operatorname{span}\{e_3, e_1 + e_2\}$

$\mathcal{L}_d^{\perp} = \operatorname{span}\{e_1 - e_2\}$.

$0 = \dim N_0 \le \underbrace{\dim N_1}_{=0} \le \underbrace{\dim N_2}_{=1} \le \dim N_3 = 1 \Rightarrow n_1 = 2.$

$d_0 = 1$.

<2> $F_7 = (2\,1\dots 1)$ $\quad n = 4$, $d = 2$

$\mathcal{L}_d = \operatorname{span}\{e_1, e_2 + e_3 + e_4\}$

$\mathcal{L}_d^{\perp} = \operatorname{span}\{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$.

$\Rightarrow f_i = f_{i-1}$.

$$R = \frac{1}{2/3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$n_1 = 3$

$f_{i+2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) + 0 \cdot f_{i-1}$

ЛРФ и характеристический полином.

$F = (f_0, f_1, \dots)$

(*) $f_{i+d} = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{i+d-k}$, $a_d \neq 0$.

Def: $P(\mu) = \mu^d - \sum_{k=1}^{d} a_k \mu^{d-k} = \sum_{k=0}^{d} b_k \mu^{d-k}$ – хар-ий полином

Лемма:

∃ $\mu_1, \dots \mu_d$ – корни х. п. $P(\mu)$ $(\mu_i \neq 0)$

Тогда $\forall j$ ряд с $f_k = \mu_j^k$ будет упр-ем ЛРФ (*).

∃ μ_j все разные. Тогда никаких других рядов не сущ-ет.

(*) $\Leftrightarrow f_k = \sum_{\ell=1}^{d} c_\ell \mu_\ell^d$

Общий случай.

$\mu_1, \dots \mu_p$ – разл. корни х. пол. $P(\mu)$.

с кр-ти k_i и $\sum_{i=1}^{p} k_i = d$

Тогда ряд F_n удов-т ЛРФ (*)

$\Leftrightarrow f_n = \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{j=0}^{k_m - 1} c_{mj} n^j \right) \mu_m^n$, где

c_{mj} определ. 1-зн. d для-ми ряда $f_0, \dots f_{d-1}$.

б/д.

28.10.10

Замечание (вещ. случ.):
как переписать в вещ. случ.:

$\mu_1 = \rho e^{2\pi i\omega}$, $\mu_2 = \rho e^{-2\pi i\omega}$, тогда

$$f_n = \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{j=0}^{k_m} a_{mj} n^j \right) \rho^n \cos(2\pi\omega_j \cdot n + \varphi_j)$$

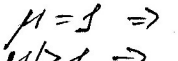
Интерпретация корней хар-ого полинома.

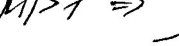
$\exists d \le 2$, вещ. случ.

$d=1$: $p(\mu) = \mu - c$

$\Rightarrow$ 1 вещ. корень $\mu \Rightarrow f_n = A\mu^n$

$\mu = 1 \Rightarrow f_n = const$

$|\mu| > 1 \Rightarrow$ 

$|\mu| < 1 \Rightarrow$ 

собств. числа - отражают амплитуду
корни: отр-ют динамику.

$d=2$: $p(\mu) = \mu^2 + b\mu + c$

1) 2 вещ. разн. $\mu_1 \neq \mu_2$: $f_n = c_1\mu_1^n + c_2\mu_2^n$

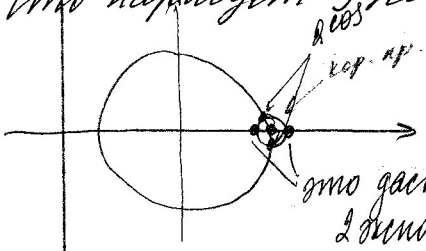
2) 2 комп. разн. $\Rightarrow$ комп.-сопр. $f_n = C\rho^n \cos(2\pi\omega n + \varphi)$

3) 1 вещ. кор. кр-и 2 $\Rightarrow$ $f_n = (an+b)\mu^n$

$\mu = 1 \Rightarrow f_n = an + b$.

Замечание:
При вычислениях не может получиться полином с кратн. корнями.

Что нарисует Гурсенчуя?



Ex: $f_n = \rho^n$ $\exists \rho = 1,2$. $\frac{f_{n+10}}{f_n} \sim 6$ $\frac{f_{n+100}}{f_n} \sim 8 \cdot 10^7$.

$\rho = 0.8$ $\frac{f_{n+100}}{f_n} \sim \frac{1}{5} \cdot 10^{-7}$

$\exists$ есть АРФ порядка $k-1$, управл-ими рядом F_n ранга d.

$\exists$ все корни разные $\Rightarrow$ есть ряд ранга d

$\Rightarrow f_n = \sum_{j=1}^{d} c_j \mu_j^n$

С др. стор: упр-ся АРФ $\Rightarrow f_n = \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{c}_j \tilde{\mu}_j^n$

1). $\exists$ d штук $\tilde{\mu}_j$ совпар-их с μ_j.

2). Коэф-т при ост. $\tilde{\mu}_j$ равен 0.

3). μ_j - корни миним. АРФ упр-ей рядом.

(μ_j - signal roots или главные корни.

$\tilde{\mu}_j : \tilde{\mu}_j \neq \mu_k$ - extraneous roots // мнимые корни)

Утв. $\exists\, \mathcal{L}_d \in \mathcal{L}_d$. Возьмём $S = \begin{pmatrix} -R \\ 1 \end{pmatrix}$. Он даёт $\min \|R\|$ $R: \begin{pmatrix} -R \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_d^{\perp}$ (R – min-норм ЛРФ) Д-во:

$\mathbb{P}_d^{\perp} S = 0$, где $\mathbb{P}_d = [P_1 : \dots : P_d]$, $\{P_1, \dots P_d\}$ – ортонорм. базис $\mathcal{L}_d$.

$(\mathbb{P}_d^{\nabla})^T T = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_d \end{pmatrix} \overset{def}{=} y$ – у этой сист-ы решений много $\Rightarrow$ нужно найти реш-е с мин. нор.

Мин. по норм $T = (\mathbb{P}_d^{\nabla T})^{+} y = \mathbb{P}_d^{\nabla} ((\mathbb{P}_d^{\nabla})^T \mathbb{P}_d^{\nabla})^{-1} y$. так находится

Осталось преобразовать и пок-ать, что об-ен с S.

$\mathbb{P}_d^T \mathbb{P}_d = \mathbb{I}_d = yy^T + \underbrace{(\mathbb{P}_d^{\nabla})^T \mathbb{P}_d^{\nabla}}_{W = \mathbb{I}_d - yy^T}$

$W^{-1} = \mathbb{I}_d + \frac{1}{1-v^2} yy^T$, где $v^2 = yy^T$.

Осталось подставить и получить.

ч.т.д.

Утв. Мин. норм min-норм ЛРФ по модулю < 1.

Схема д-ва:

вектор из $\mathcal{L}_d^{\perp} \leftrightarrow$ ЛРФ $\leftrightarrow$ х.п. $P_d(z) \cdot \Phi_n(z)$, где

$P(z)$ – х.п. миним. ЛРФ, где $n = d - d - 1$.

$P(z) = p_d z^d + \dots + p_1 z + p_0$.

$\Rightarrow$ возникает $(p_0, \dots p_d)^T \in \mathbb{R}^{\overbrace{d+1}^{L-d}}$

$\mathcal{L}_d^{\perp}$ = пространство столбцов матр. $\begin{pmatrix} p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ p_d & \dots & & p_0 \end{pmatrix}$ $\} d = A$

$c\begin{pmatrix} R \\ -1 \end{pmatrix} = A(A^*A)^{-1}A^*e_2$ – проекция

$\exists$ вектору $\begin{pmatrix} R \\ -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{соотв-т}} P(z)\cdot H_n(z)$

$\Rightarrow H_n(z) = (A^*A)^{-1}Ae_2 = (A^*A)^{-1}e_2$, т.к. $p_2 = 1$.

- $\{H_n(z)\}_{n\geq 1}$ – сист-а полиномов ортогон. на окружн. отн-о $t(z) = |P(z)|^2$

$$(p,q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(z)\overline{q}(z)t(z)\,d\theta,$$

где $z = e^{i\theta}$

- Действительно,

$\exists$ P_n имеет корень z_0, т.е. $P_n(z) = (z-z_0)Q(z)$

и $\langle P_n(z), Q(z)\rangle_w = 0$, т.к. ст. $Q = n-1 < n$.

Заметим, что $\|Q(z)\|_w^2 = \langle zQ(z), zQ(z)\rangle_w =$

$= \|zQ(z)\|^2 = \|Q(z)z_0 + P_n(z)\|_w^2 =$

$= |z_0|^2\|Q(z)\|_w^2 + \|P_n(z)\|_w^2.$

$\Rightarrow (1-|z_0|^2)\|Q(z)\|_w^2 = \|P_n(z)\|_w^2 > 0 \Rightarrow |z_0|^2 < 1.$

ч.т.д.

Распределение нулей корней.

$\forall$ $H_n(z)$, $n \to \infty$

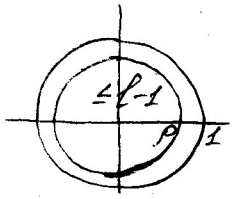
$\exists$ $\rho = \max\limits_k \min(|\mu_k|, \frac{1}{|\mu_k|})$

$\exists$ u – число корней: $|\mu_k| = \rho$; l – число корней с макс. кр-ю.

1) 4 случай, когда $\rho < 1$

кол-во $|\mu_k| \le \rho \le l-1$

Остальные ск-ся к распред. на окр-и радиуса ρ.



Если убрать м. корни, то мнж. корни имеют равн. распред

2) $\rho = 1$: то внутри лежит кол-во $\le n-1$

Метод оценивания параметров. 11.11.10.

$$\mathbb{C}: f_n = \sum_{k=1}^{r} c_k P_k(n) \mu_k^n + \varepsilon_n, \quad \mu_k = \rho_k e^{2\pi i \omega_k}$$

$$\mathbb{R}: f_n = \sum_{k=1}^{r} c_k \rho_k^n \cos(2\pi \underbrace{\omega_k}_{\text{frequency}} n + \varphi_k) + \varepsilon_n$$

$\rho_k = 1$: undamped (пост. амплитуда)

Оценивание частот в зашумлённой сумме ... -стир.

Low-resolution frequency estimation: сетка с шагом $1/n$ (преобр. Фурье) задача.

ESPRIT

Опред:] $p(\mu) = \mu^n + c_1 \mu^{n-1} + \dots + c_n$

Матр-ца: $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -c_1 \end{pmatrix}$ — companion matrix полинома $p(\mu)$

Утв: собственные числа $\mathbb{C}$ совпадают с корнями $p(\mu)$.

Лемма:
$\exists$ $\mathbb{P}$ - невырожд. матрица $n \times n$
$\mathbb{C}$ - произвольная м-ца $n \times n$

Тогда $\mathbb{C}$ и $\underbrace{\mathbb{P}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{P}}_{\text{подобная}}$ имеют один-вые с. ч.

$\exists$ $\mathbb{C}$ - нев. м-ца $n \times n$, $X \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} X^T \\ X^T\mathbb{C} \\ \vdots \\ X^T\mathbb{C}^{L-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times n}$$

$\underline{\mathbb{K}}$ - м-ца $\mathbb{K}$ без послед. строки
$\overline{\mathbb{K}}$ - - - " - первой строки.

$\overline{\mathbb{K}} = \underline{\mathbb{K}}\mathbb{C}$ - сдвиговое св-во, зар-ное матр. $\mathbb{C}$.
Отсюда можем найти $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = (\underline{\mathbb{K}})^{-1}\overline{\mathbb{K}}$

Утв:
$\exists$ $\mathbb{K}$ удовл-ет сдвиговому св-ву, зар-у $\mathbb{C}$.
$\exists$ $\mathbb{P}$ - матрица $n \times n$ полного ранга.

Определим $\mathcal{Y} = \mathbb{K}\mathbb{P}$ (переход к другим коорд-ам)

Тогда $\mathcal{Y}$ также удовлетворяет сдвиговому св-ву, задаваемому м-цей
$\mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{P}$, т.е. $\overline{\mathcal{Y}} = \underline{\mathcal{Y}}\mathbb{D}$.

Д-во: сам-но.

Утв: $\exists$ F - удовлетворяет линим. ЛРФ порядка n

$\mathbb{C}$ - матрица-компаньон хар-ного полинома.
линим. ЛРФ

$\mathcal{Y} = [y_1 : \ldots : y_n]$, где $(y_1 \ldots y_n)$ - базис L-траект-ю

пр-ва F, $L > r$.

$\exists$ удовл. сдвиговое св-во, зар-ему м-цей $\mathbb{D}$, т.ч.

с.т. $\mathbb{D}$ = с.ч. $\mathbb{C}$ = корни хар. полин. миним. ЛРФ.

Я-во:

$(f_i, f_{i+1}, \dots f_{i+(d-1)})\mathbb{C} = (f_{i+1}, \dots f_{i+d})$

Хост. знать базис траект. пр-ва.

Т.о., нужно оценивать базис траекторного пространства сигнала $S_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \mu_k^n$

$f_n = S_n + \varepsilon_n$ SSA, первое сл. (слева)

$\exists$ r-известно, S_n-должны, т.е. $(U_1, \dots U_r)$ - базис пр-ва, аппроксим-его подпр-во сигнала

ESPRIT:

1) $F_N, L \to \mathbb{X}$

2) SVD, $r \to U_1, \dots U_r$

3) $U_r = [U_1, \dots U_r] \in \mathbb{R}^{L \times r}$

Решаем $\underline{U_r}\mathbb{D} \approx \overline{U_r}$

LS-ESPRIT (least squares): $\hat{\mathbb{D}} = \underline{U_r}^{+}\overline{U_r}$ (в МНК: ошибки только у независимых)

$\|U_r\hat{\mathbb{D}} - \overline{U_r}\|^2 \to \min_{\hat{\mathbb{D}}}$

про TLS (total ls): $A\hat{X} \approx B$ - ошибка будет

$$\|\tilde{A} - A\|_{\mu}^2 + \|\tilde{B} - B\|_{\mu}^2 \to \min$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B} : \exists z \ \tilde{A}z = \tilde{B})$$

Скорость сходимости для $S_n = C_n e^{\text{action}}$, ех-ть μ_1, k μ_1.

$$\frac{\mathcal{R}(\vec{w})}{\mathcal{R}''\vec{p}} \sim \frac{c}{2k^2} = \frac{c}{\min(1,k)(\max(1,k))^2}$$ (случай undamped)

(~ high-resolution умеет разделять близкие частоты)

Ex: $y + \varepsilon$, где $\underline{y} = \overline{y}D$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{м-ца сдвига: } \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

С.з. у м-цы сдвига - ...

Оценить коэф. ($\mathcal{R} \sim O(\frac{1}{n})$!)

Другие методы оценивания частот ω_k (или μ_k):

(1). ЛРФ порядка $k-1$, r

$(\mu_1, \dots \mu_{k-1})$ - корни хар. полинома

$$S_n = \sum_{k=1}^{k-1} c_k \mu_k^n$$

Оцениваем c_k (МНК), считаем главными те корни, у которых c_k наибольшие. (их ровно r штук).

Signal subspace methods - методы, использующие оценки подпр-ва сигнала.
Subspace-based methods (SS).

② Forward / Backward : ш. корни : $x \sim \frac{1}{x}$
min-norm ЛРФ min-norm ЛРФ Линии : $z \sim \bar{z}$.
Сравнение

③ Взять много разных ЛРФ → у всех ш. корни ≈ одинаковые, а линии разные
(∀ вектор из подпр. ⊥ подпр. сигнала задает ЛРФ).

④ MUSIC (get undamped exponential)

$\vec{z}(z) = (1, z, \dots z^{d-1})^T$, если z - ш. корень, то
$(\vec{z}(z), A) = 0$, где $A \in \mathcal{L}_d^{\perp}$

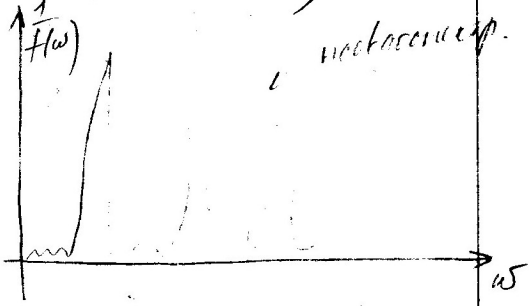
Идея: если z совпадает с μ_k, то $\vec{z}(z)$ лежит в подпр-ве сигнала.

Undamped $\Rightarrow \mu_k = e^{2\pi i \omega_k}$ (формализуется только частоты)

$W(\omega) \overset{def}{:=} \vec{z}(e^{2\pi i \omega})$

$f(\omega) = \cos^2(W(\omega), \mathcal{L}_d^{\perp})$

$f(\omega_k) = 0$ из сигнала



18.11.2010г. **О существовании ряда конечной размерности, лежащего в заданном подпространстве.**

Рег. упр. ЛРФ ⇝ подпространство.

А обратно?

$\exists\, \mathcal{L}_d \subset \mathbb{R}^L$, $d < L$: $\dim \mathcal{L}_d = d$

Хороший случай: $e_L \notin \mathcal{L}_d$

$\mathcal{L}_d = \{ x_L + b_{i,1} x_{L-1} + \dots + b_{i,L-1} x_1 = 0 \,;\ i = 1, \dots L-d \}$

т.к. просто x_L, без коэф., т.к. $e_L \notin \mathcal{L}_d$.

$(b_{i,L-1}, \dots b_{i,1}, 1) \in \mathcal{L}_d^{\perp}$

Утв:

Чтобы $\exists$ бесконечный ряд $\Phi = (\varphi_0, \dots \varphi_n, \dots)$:

L-вложение вектора $\in \mathcal{L}_d$ $\Leftrightarrow$ чтобы следующих $(L-d)$ полиномов имели хотя бы 1 общий корень:

$P_i(\mu) = \mu^{L-1} + b_{i,1}\mu^{L-2} + \dots + b_{i,L-1}$, $i = 1, \dots L-d$.

Если $L = d+1$, то всегда ряд Ф-ей.

$\exists\, \Phi$; вектора L-вложения $\in \mathcal{L}_d$ $\Rightarrow$ (Я - бо:)

$\varphi_n = a_{i1}\varphi_{n-1} + \dots + a_{i,L-1}\cdot\varphi_{n-L+1}$, $n \geq L-1$, $i = 1, \dots L-d$

$a_{ij} = -b_{ij}$

$(L-d)$ штук ЛРФ ☺.

▷ $\mu_{j,i}$ – j-ый корень хар. полинома i-ой ЛРФ: $\begin{matrix} j=1,..L-1 \\ i=1,..L-d \end{matrix}$

Для более простой записи считаем, что

$$\mu_{j_1,i} \neq \mu_{j_2,i}.$$

Ряд вып-ся лин. комб. корней хар. n-нома, т.е.

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_{j,i} \mu_{j,i}^n.$$

Это н.д. только если ∃ хотя бы d одинаковых корня $i = 1,..L-d$ (тогда м. обнулить коэф. при остальных), иначе – ряд нулевой.

Следствие

∃ $L = d+1, e_L \notin \mathcal{L}_d$

Тогда ∃ ЛРФ: $\varphi_n = a_1 \varphi_{n-1} + .. + a_{1,L-1} \varphi_{n-L+1}$ порождает все ряды, вектора L-вложения которых $\in \mathcal{L}_d$.

Глава Продолжение временных рядов.

$F_N = (f_0, .. f_{N-1})$ (d, L, N)-допустимое

$d = \operatorname{rank}_L F_N$; $K = N - L + 1$

$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_d^{(L)}$ – L-траекторное простр-во.

Def: Ряд F_N продолжим в $\mathcal{L}_d$ (L-продолжим), если ∃! $\tilde{f}_N$ т.что $\tilde{X}_{K+1} = \begin{pmatrix} f_K \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ \tilde{f}_N \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_d$.

Другими словами, $\exists! \tilde{f}_N$: у ряда $\tilde{F}_{N+1} = (f_0, \dots f_{N-1}, \tilde{f}_N)$ то же траектор. пр-во.

Замечание:

$\exists \tilde{f}_N$ ∃-ен. Тогда оно единств $\Leftrightarrow e_L \notin L_d$.

∃ для определенности $d \le k$.

Теорема.

1. ∃ ряд F_N управляется ЛРР размерности $d_0 < L$

$$f_{i+d_0} = \sum_{k=1}^{d_0} a_k f_{i+d_0-k}, \quad 0 \le i \le N-d_0-1$$

Тогда он L-продолжаем и его продолжение может быть получено как:

$$\tilde{f}_N = \sum_{k=1}^{d_0} a_k f_{N-k}.$$

2. Если $d = \operatorname{rank}_L(F_N) < L$, $e_L \notin L_d(F_N)$, то ряд L-продолжаем и его продолжение может быть получено по некоторой ЛРР размерности $\le L-1$

Д-во:

1. $\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} X_k \\ \end{pmatrix}}_{d_0} \begin{pmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{f}_N \end{pmatrix}$ $\quad d < L$, $\quad d \le k$ ← это более сильное.

∃ $\tilde{f}_N = \sum_{k=1}^{d_0} a_k f_{N-k} \Rightarrow \tilde{X}_{k+1} = \sum_{k=1}^{d_0} a_k X_{k+1-k} \Rightarrow \tilde{X}_{k+1} \in L_d$.

2. База th: усл. $\Rightarrow$ ЛЯРФ $\overset{п.1}{\Rightarrow}$ ок.

ч.т.д.

Продолжение ~ добавление ещё одного вектора:

$$\tilde{X}_{K+1} = \mathbb{D}_L X_K, \quad \mathbb{D}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{L-1} & \dots & & a_1 \end{pmatrix}$$

$$R = (a_{L-1}, \dots a_1, -1)^T.$$

$\exists\, \mathcal{L}_d$ - какое-то пр-во размерности d, $X \in \mathcal{L}_d$

Заметим, что

$$y = \mathbb{D}_L X \in \mathcal{L}_d \Leftrightarrow \begin{cases} X_\Delta \in \mathcal{L}_d^\nabla \\ y = (R, X_\Delta) \end{cases}$$

(верхняя часть y – это нижняя часть X)

$$\begin{pmatrix} x \\ X_\Delta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y^\nabla \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_d$$

нужно такой вот построить.

Def: $\Pi :=^{def}$ оператор проектирования $\mathbb{R}^{L-1}$ на $\mathcal{L}_d^\nabla$

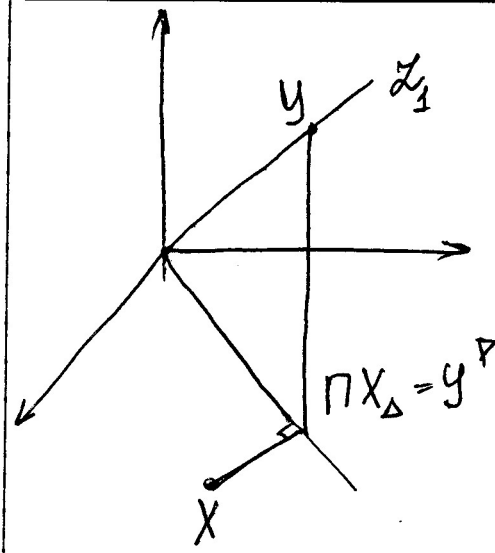
Утв: $\exists\, X \in \mathcal{L}_d$

Для $y = \mathbb{D}_L \begin{pmatrix} x \\ \Pi X_\Delta \end{pmatrix}$:

1) $y \in \mathcal{L}_d$

2) $\| y^\nabla - X_\Delta \| \to \min$

$$\begin{pmatrix} \Pi X_\Delta \\ (R, \Pi X_\Delta) \end{pmatrix}$$



$L=3$
$d=2$

Утв: $\exists\, L=d+1,\ e_L \notin L_d = L_{L-1}$

Тогда $L_{L-1}^\nabla = R^{L-1} \Rightarrow \Pi$ – тождественный оператор,

т.е. $\forall\, X \in L_{L-1}\quad D_L X \in L_{L-1}$

Д-во:

$L_{L-1} = \{z \in R^L : (A, z) = 0\}$

($e \notin L_d \Rightarrow$ последняя координата не нулевая $\Rightarrow$ остальные могут быть любыми.

Вид оператора Π.

L_d, $P_1 \dots P_d$ – его ортонормир. базис

$P_i = \begin{pmatrix} P_i^\nabla \\ \pi_i \end{pmatrix}$ $\qquad V^\nabla = [P_1^\nabla : \dots : P_d^\nabla]$

$\nu^2 = \sum_{i=1}^{d} \pi_i^2$

Утв (без д/ва):

1. $\Pi = V^{\triangledown}(V^{\triangledown})^T + (1-\nu^2) R R^T$ Или же умнож. вычитаемое пр-ра.

$(V^{\triangledown}(V^{\triangledown T} V^{\triangledown})^{-1} V^{\triangledown T})$

2. Оказывается: $(R, \Pi X_{\triangle}) = (R, X_{\triangle})$.

Синт. трансдюс. ред:
1). Если он имеет структуру.

2). Э-т метод для идентификации стр-ра.

3). Э-т. — " — для продолжения этой структуры.

4). Э-нт основания предполагать, что струк-а сохранится — непроверяемо совсем.

Структура, формализованная ~ модель

Модели: • ряды с ЛРФ

• параметрич. модель: параметров мало (регрессия, матр., не справл.)

Анализир. ред можно не задавая модели. Таким образом пред-ть шире.

Для остатков: еще нужно модель кроме задр-в.

Разладка.

Обнаружение разладки методом Гусенина.

$[0, S]$ ___ $[S+Q, \dots]$

в момент S структура меняется.

если в м. S+Q стр. восст – временная

– и – не восст – разладка.

Варианты:

1) разладка в среднем

2)

3)

4)

момент разладки.

Подходы:

1) Априорный: в режиме реал. времени обнаружить разладку (задаем ошибки α_I и α_{II}, модель => страхи)

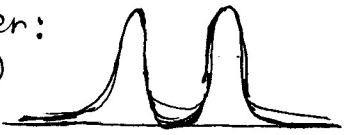
2) Апостериор: вер уже есть, отражается есть или нет.

Занимаемся (2):

Надо научиться вычислять ρ(отр. 1, отр. 2) (расстояние)

Скольз. отрезки: ① b t ② ← больший кусок, ← меньший
- лучше контраст, но обнаружим позже
- хуже контр-в.

①. 
← ρ(отр. 1; отр 2). (ф-я разницы)

Если outlier: (один) 

Еще вариант: 2ой кусок фиксир.; а 1ый изменяет длину.

Как использовать Гусеницу?

В, Т, $\mathcal{L}^{(1)}_{\eta_1}$ - структура ряда до разницы
$\eta_1 = \text{span}(U_1^{(1)} \dots U_{r_1}^{(1)})$ $F^{(1)}$
2. $\mathcal{L}^{(2)}_{\eta_2}$ - стр. ряда после разницы $F^{(2)}$

Берем $\mathcal{L}^{(1)}_{\eta_1}$ и считаем расстояние до него вех-в вложения тестового ($\mathcal{L}^{(2)}_{\eta_2}$).

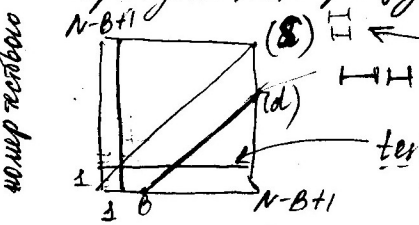
$$\rho^2(\text{баз}; \text{тест}) = \frac{\sum_{i=1}^{T-L+1} \text{dist}^2\left(X_i^{(2)}, \mathcal{L}^{(1)}_{\eta_1}\right)}{\sum_{i=1}^{T-L+1} \|X_i^{(2)}\|^2}$$ ← Вводим точную меру (мера неортогональности).

Св-ва мер неодн:

1. $\rho^2 \le 1$.
2. $\mathcal{L}(F^{(2)}) \subset \mathcal{L}_{r_1}^{(1)} \Rightarrow \rho^2 = 0$.
3. $\mathcal{L}(F^{(2)}) \perp \mathcal{L}_{r_1}^{(1)} \Rightarrow \rho^2 = 1$
4. $F^{(1)} = F^{(2)} \Rightarrow \rho^2 = \dfrac{\sum_{i=r_1+1}^{L} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{L} \lambda_i^2}$.

---

i - тая точка базового отр.
j - тая т-а тестового.
Нарисуем матрицу: $\rho_{ij} = \rho(F_{i,i+B-1}; F_{j,j+T-1})$

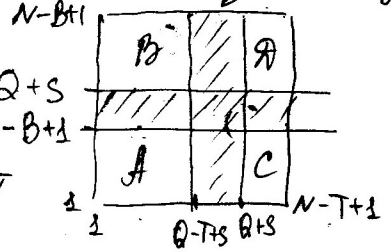


показывает на сколько хорошо описывает сигнал.

test не двигаем, а базовое двигается.

B - длина участка
Q - начало разладки
S - число точек в первом периоде.

непонятно что происходит.



$F_{1,Q-1}$ до разл. $\mathcal{L}^{(1)}$

$F_{Q+S,N}$ после разл. $\mathcal{L}^{(2)}$

α (число первых комп-т для восстан-я) =

$= \dim \mathcal{L}^{(1)}$, т.е. ранку $F_{1,Q-1}$

Перманентная (постоян) разница: $\mathcal{L}^{(1)} \neq \mathcal{L}^{(2)}$

1). $\dim \mathcal{L}^{(1)} = \dim \mathcal{L}^{(2)}$

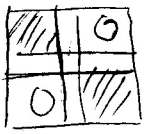
$$f_n = \begin{cases} c_1 \sin(2\pi w_1 n + \varphi_1), & n \leq Q \\ c_2 \sin(2\pi w_2 n + \varphi_2), & n > Q \end{cases}$$

$w_1 \neq w_2$

$A = (1)$ - всегда!!! Если $\alpha = \dim \mathcal{L}^{(1)}$ – (число тех комп. весов).

$X^{(2)} \in \mathcal{L}^{(1)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ - совпадает с $\mathcal{L}(f_n^{(2)})$ т.к. ор-ое разностное.

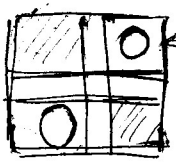
$\Rightarrow$ В и С не (1)



$A = (1)$ в нашем случае

(2). $\dim \mathcal{L}^{(1)} > \dim \mathcal{L}^{(2)}$ и $\mathcal{L}^{(1)} \not\supset \mathcal{L}^{(2)}$

$$f_n = \begin{cases} c_1 \sin(2\pi w_1 n + \varphi_1) + \tilde{c}_1 \sin(2\pi \tilde{w}_1 n + \tilde{\varphi}_1) \\ c_2 \sin(2\pi w_2 n + \varphi_2), \quad n > 0 \end{cases}$$



всегда 0, если $\dim \mathcal{L}^{(1)} > \dim \mathcal{L}^{(2)}$

$\tilde{w}_1 \neq w_2$

$w_1 \neq w_2$

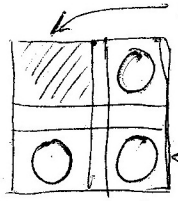
$\Downarrow$

$\boxed{\alpha = 4}$

(3). $\dim \mathcal{L}^{(1)} > \dim \mathcal{L}^{(2)}$ $\quad \mathcal{L}^{(1)} \supset \mathcal{L}^{(2)}$

$$f_n = \begin{cases} c_1 \sin(w_1 2\pi n + \varphi_1) + \tilde{c}_2 \sin(\tilde{w}_1 2\pi n + \varphi_2) \\ c_2 \sin(w_2 2\pi n + \varphi_2) \end{cases}$$

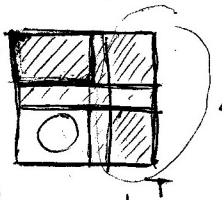
$w_1 = w_2$



(4) $\dim \mathcal{L}^{(1)} < \dim \mathcal{L}^{(2)}$ $\mathcal{L}^{(1)} \not\subset \mathcal{L}^{(2)}$

$$f_n = \begin{cases} c_1 \sin(2\pi w_1 n + \varphi_1) \\ c_2 \sin(2\pi w_2 n + \varphi_2) + c_3 \sin(2\pi \tilde{w}_2 n + \tilde{\varphi}_2) \end{cases}$$

$\boxed{\alpha = 2}$



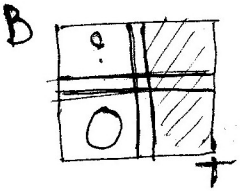
$w_1 \neq w_2$

← всегда $\neq 0$ в такой ситуации.

(5) $\dim \mathcal{L}^{(1)} < \dim \mathcal{L}^{(2)}$ $\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)}$.

$$f_n = \begin{cases} c_1 \sin(2\pi w_1 n + \varphi_1) \\ c_2 \sin(2\pi w_2 n + \varphi_2) + \tilde{c}_2 \sin(2\pi \tilde{w}_2 n + \tilde{\varphi}_2) \end{cases}$$

$w_1 = w_2$.

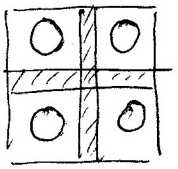


Если есть раздвоение $\Rightarrow$ могли быть в вра отн-ии к $\tilde{w}_1$. для этого $c_2 > \tilde{c}_2 \Rightarrow$ $B = ⓘ$

$B =$ 

Временная разделка:

(6) $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(2)}$



Примеры временной разладки.

а) На промежутке $[\theta, \theta+S]$ что-то другое: вторые, обнулился, сменился ритм.

б) $S=0$: изменение фазы или/и амплитуд.

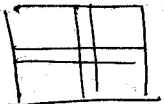
$$f_n = \begin{cases} c_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \varphi_1) \\ c_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \varphi_2) \end{cases}$$

в) $S=0$: $f_n = an + b$.

a, b – разные до и после – это врем. разладка

Где будет тёмная полоска?





по вертикали!

Т.к. подпр-во испортилась сильно с векторами вертикальными.

Другие способы находить разладку в частотах:

1) Скользящая периодограмма (строим период. по скол. отрезкам).